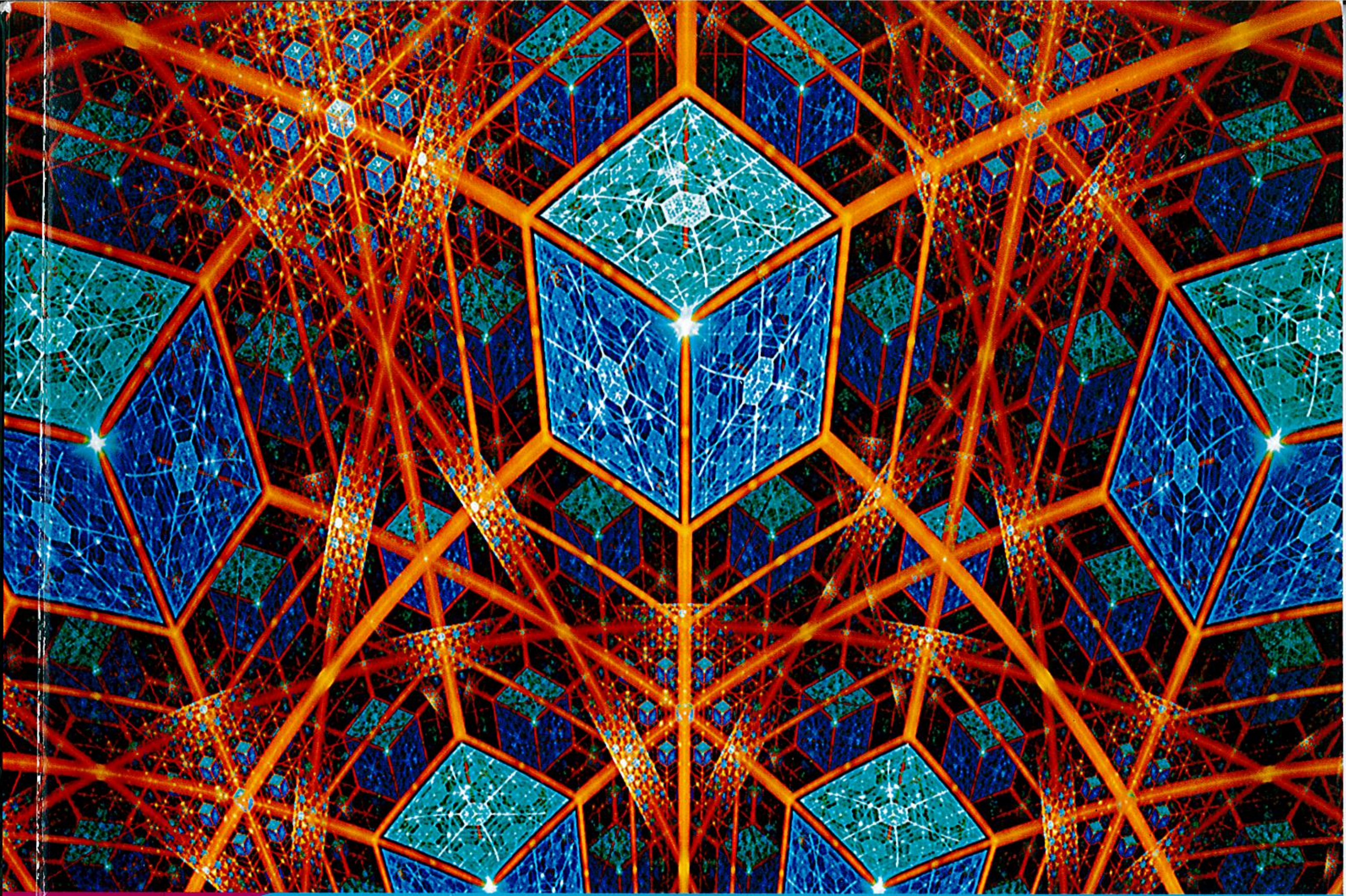


Organizadora: Editora Moderna

Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável: Fabio Martins de Leonardo

Conexões com a Matemática

3

Código da Coleção

27519COL02

Material de divulgação da

Editora Moderna

MANUAL DO PROFESSOR

Componente curricular:
MATEMÁTICA

Moderna

Conexões com a Matemática

3

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável: Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Componente curricular: MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

2ª edição

São Paulo, 2013

Moderna

Elaboração dos originais

Alexandre Raymundo
Bacharel e licenciado em Matemática pela Universidade São Judas Tadeu de São Paulo. Professor em escolas particulares no Brasil e na Turquia.

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Débora Regina Yogui
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Flávia Renata Pereira de Almeida Fugita
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Juliane Matsubara Barroso
Bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professora em escolas públicas e particulares de São Paulo por 10 anos. Editora.

Kátia Takahashi
Licenciada em Ciências pelo Centro Universitário Sant'Anna. Professora em escolas particulares de São Paulo por 9 anos. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Osvaldo Shigueru Nakao
Doutor em Engenharia Civil (área de concentração: Engenharia de estruturas) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Edição de texto: Adriano Rosa Lopes, Ana Paula Souza Nani, Dario Martins de Oliveira, Juliana Ikeda, Pedro Almeida do Amaral Cortez, Thaicia Stona de Almeida
Preparação de texto: Lince comércio e criações de livros
Coordenação de *design* e projetos visuais: Sandra Botelho de Carvalho Homma
Projeto gráfico: Everson de Paula, Marta Cerqueira Leite
Capa: Everson de Paula
Fotos da capa: Fractal "Cuboidal", de Cory Ench. © Cory Ench Gallery
Coordenação de produção gráfica: André Monteiro, Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de arte: Patricia Costa, Tais Nakano, Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Alexandre Cabral Benites
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Edição de infografia: William Taciro, Mauro César Brosso, Fernanda Fencz, Paula Paschoalick
Coordenação de revisão: Elaine C. del Nero
Revisão: Afonso N. Lopes, Ana Maria C. Tavares, Dirce Y. Yamamoto, Fernanda Marcelino, Maristela S. Carrasco, Rita de Cássia Sam, Sandra G. Cortés
Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron
Pesquisa iconográfica: Carol Böck, Fernanda Siwiec, Daniela Baraúna, Yan Comunicação
Coordenação de *bureau*: Américo Jesus
Tratamento de imagens: Arleth Rodrigues, Marina M. Buzzinaro, Rubens M. Rodrigues, Wagner Lima
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira Silva, Hélio P. de Souza Filho, Marcio H. Kamoto
Coordenação de produção industrial: Wilson Aparecido Troque
Impressão e acabamento: Gráfica Santa Marta

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo . — 2. ed. — São Paulo : Moderna, 2013.

Obra em 3 v.
Bibliografia
"Componente curricular: Matemática".

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

13-03619 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2014
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Esta coleção é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma obra de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo os conceitos com uma imagem. A seguir, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e com a *Autoavaliação.*

As seções *Pesquisa e ação*, *Resolução comentada*, *Compreensão de texto* e *Sugestões de leitura* complementam e enriquecem a obra.

Com esta coleção, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do aluno.

Os editores

Sumário

Capítulo 1 – Matemática financeira 8

1. Introdução ao estudo da Matemática financeira 8
2. Taxa percentual 8
3. Juro simples 13
4. Juro composto 15

Exercícios complementares 19

Autoavaliação 22

Pesquisa e ação 23

Resolução comentada 24

Capítulo 2 – Análise de dados 26

1. Noções de Estatística 26
2. Distribuição de frequências 29
3. Representações gráficas 35
4. Histograma e polígono de frequências 43
5. Frequência relativa e probabilidade 45

Exercícios complementares 47

Autoavaliação 50

Resolução comentada 51

Compreensão de texto 54

Capítulo 3 – Medidas estatísticas 56

1. Medidas de tendência central 56
2. Medidas de dispersão 69

Exercícios complementares 74

Autoavaliação 76

Pesquisa e ação 77

Compreensão de texto 78

Capítulo 4 – Conceitos básicos e a reta 80

1. O ponto 80
2. A reta 92
3. Posição relativa entre duas retas no plano 105
4. Distância entre ponto e reta 113
5. Inequações do 1º grau com duas incógnitas 115
6. Área de uma superfície triangular: uma aplicação na Geometria analítica 117

Exercícios complementares 120

Autoavaliação 123

Capítulo 5 - Circunferência 124

1. Equações da circunferência 124
2. Posições relativas 130

Exercícios complementares 137

Autoavaliação 138

Pesquisa e ação 139

Compreensão de texto 140

Capítulo 6 - Cônicas 142

1. Secções cônicas 142
2. A elipse 144
3. A parábola 148
4. A hipérbole 151

Exercícios complementares 155

Autoavaliação 157

Resolução comentada 158

Compreensão de texto 160

Capítulo 7 - Números complexos 162

1. Os números complexos 163
2. Operações com números complexos 166
3. Representação geométrica de um número complexo 169
4. A forma trigonométrica de um número complexo 172
5. Operações na forma trigonométrica 173

Exercícios complementares 180

Autoavaliação 181

Resolução comentada 182

Capítulo 8 - Polinômios e equações polinomiais 184

1. Os polinômios 184
2. Operações entre polinômios 188
3. Equações polinomiais ou algébricas 197

Exercícios complementares 205

Autoavaliação 207

Sugestões de leitura 208

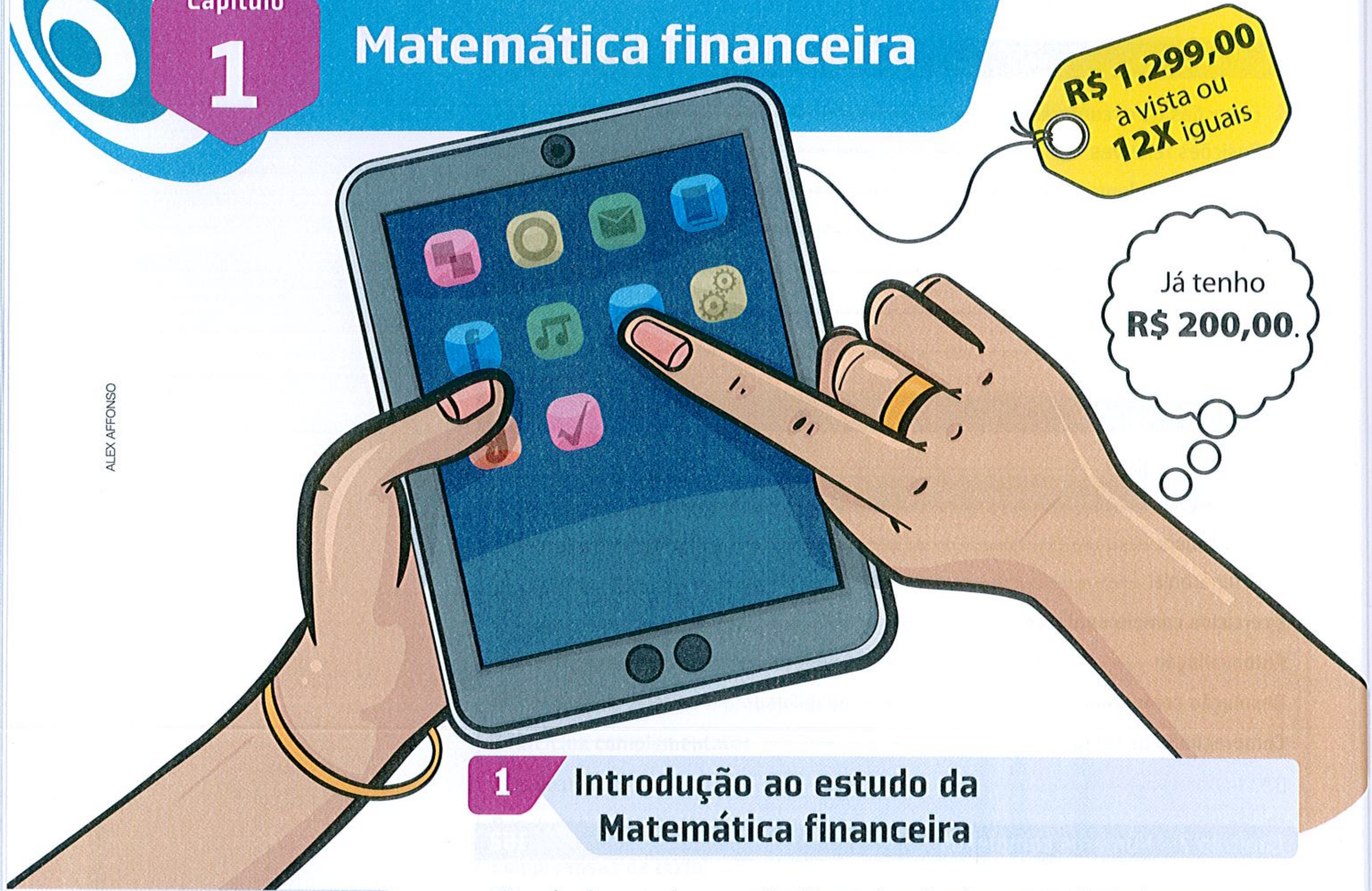
Respostas 210

Lista de siglas 222

Bibliografia 223

Capítulo 1

Matemática financeira



ALEX AFFONSO

Objetivos do capítulo

- Resolver problemas que envolvam taxa percentual.
- Analisar e aplicar os regimes de juro simples e de juro composto.

1 Introdução ao estudo da Matemática financeira

O conhecimento de operações financeiras simples, como cálculo de empréstimos, financiamentos, descontos, taxas de juro e rendimentos de investimentos, é de grande importância para o exercício pleno da cidadania.

A situação da abertura e o problema a seguir trazem situações do cotidiano em que o conhecimento de operações financeiras pode auxiliar o consumidor.

Hoje, as dívidas de Marcelo somam R$ 5.226,00. Daqui a 3 meses, ele receberá uma indenização cujo valor permitirá quitar a sua dívida acrescida dos juros. Segundo seus cálculos, na época em que receber a indenização, seu déficit, em decorrência dos juros, passará a R$ 5.670,21. O que Marcelo deve fazer: pedir um empréstimo (a ser pago após 3 meses, com juro simples de 2,6% ao mês) para quitar as dívidas hoje ou esperar os 3 meses e quitá-las com o dinheiro da indenização?

Neste capítulo, você estudará recursos matemáticos que podem ser empregados para resolver problemas desse tipo, como os mecanismos que regem as taxas de juro simples e de juro composto.

2 Taxa percentual

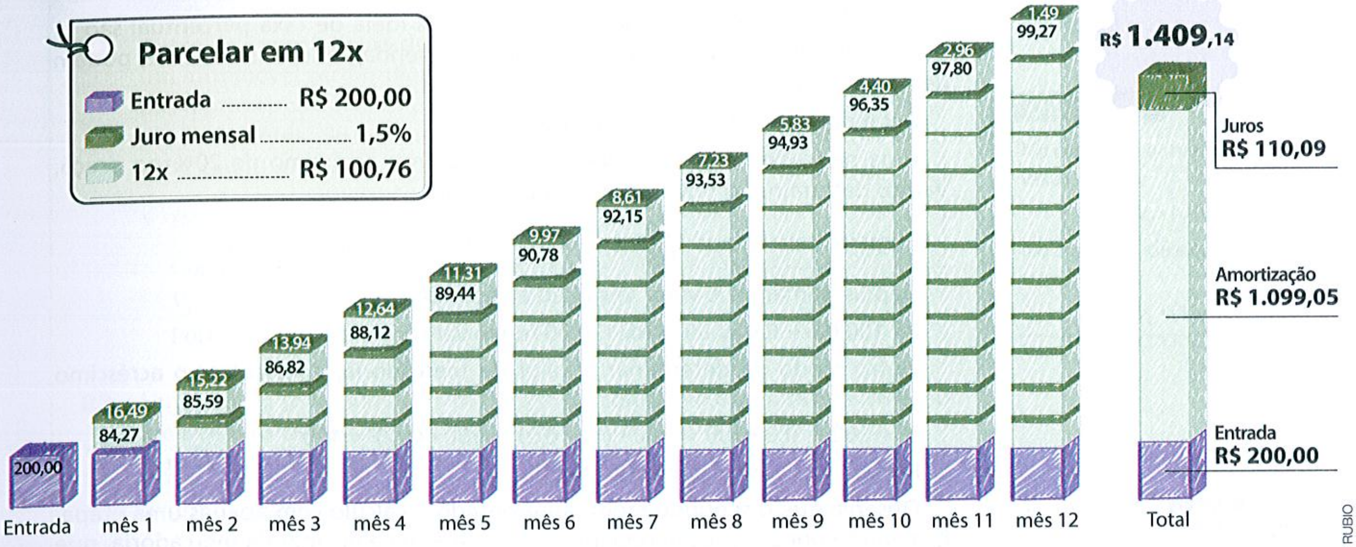
2.1 Definição de taxa percentual

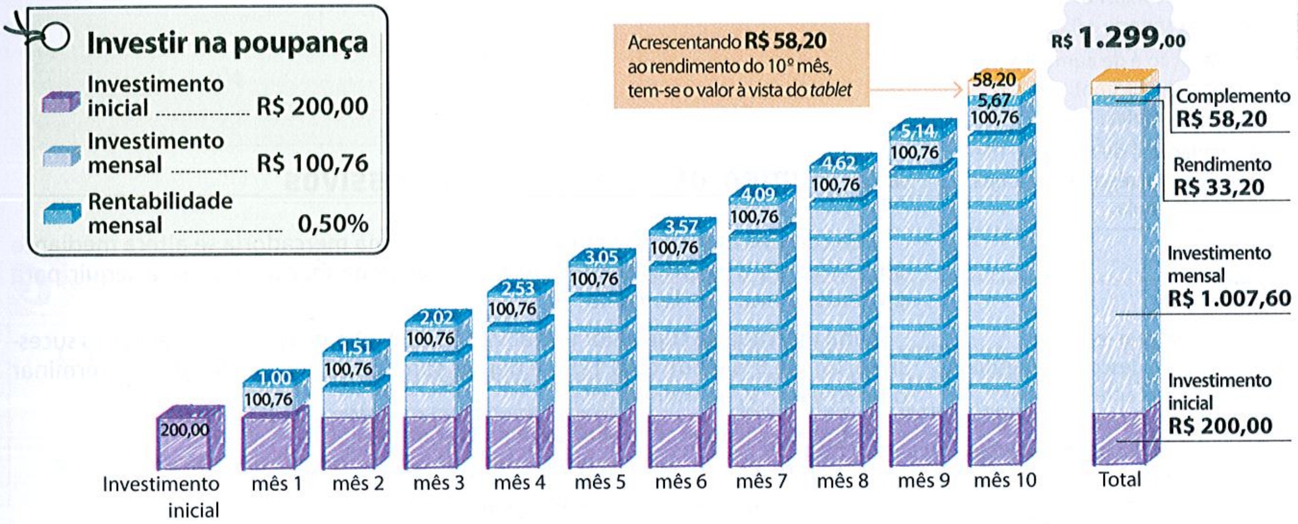
É comum encontrarmos no comércio promoções do tipo "Leve 5 e pague 3". Esse tipo de promoção equivale a um desconto para o consumidor, que pode ser determinado da seguinte forma: nessa promoção, não se paga por 2 das 5 unidades compradas, isto é, há um desconto de $\frac{2}{5}$, que é uma fração equivalente a $\frac{40}{100}$.

Explore

Pesquise em um supermercado alguns produtos que estejam em promoção, como descrito na situação ao lado ("Leve 5 e pague 3"). Anote o valor do produto da promoção e o valor do produto unitário, fora da promoção. Vale a pena comprar os produtos da promoção? Qual é o valor do desconto oferecido? respostas pessoais

Agora, junte-se a um colega e pesquisem no *Código de defesa do consumidor* quais são as regras para as promoções de venda. Faça uma apresentação para a turma.





ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Por isso, dizemos que o desconto nessa promoção é de $\frac{40}{100}$ ou de 40%.

Observe que o desconto foi representado de duas formas distintas. Quando expressamos esse valor na forma 40%, estamos usando a forma da **taxa percentual**.

Taxa percentual, ou **porcentagem**, é uma forma usada para expressar a razão entre um número real p e o número 100, que indicamos por p%.

A expressão "por cento" vem do latim *per centum*, que significa "divisão por 100".

A porcentagem é um conceito relativo, ou seja, só podemos falar em "porcentagem de alguma coisa".

Exemplos

a) $25\% \text{ de } 200 \Leftrightarrow \frac{25}{100} \cdot 200 = \frac{1}{4} \cdot 200 = 0{,}25 \cdot 200 = 50$

b) $120\% \text{ de } 60 \Leftrightarrow \frac{120}{100} \cdot 60 = \frac{6}{5} \cdot 60 = 1{,}2 \cdot 60 = 72$

c) $30\% \text{ de } 40\% \text{ de } 75 \Leftrightarrow \frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot 75 = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 75 = 9$

Reflita

Na situação apresentada na abertura, se for escolhida a opção de pagar em 12 vezes iguais, em quantos meses o valor que já foi pago é maior que o preço do *tablet* à vista? em 11 meses

Reflita

Você observou que calcular 25% de um número é equivalente a multiplicá-lo por 0,25.

- Por quanto devemos multiplicar um número se queremos 500% desse número? Multiplicar por 5.
- E se quisermos calcular 0,15% desse número? Multiplicar por 0,0015.

2.2 Aplicações do conceito de taxa percentual

Algumas das aplicações mais importantes da ideia de taxa percentual são as que envolvem transações mercantis (compra e venda), que, basicamente, podem gerar acréscimos, descontos, lucros ou prejuízos.

Acompanhe a resolução de um problema.

Uma mercadoria que custava R$ 100,00 sofreu acréscimo de 20% no preço. Vamos determinar o novo valor da mercadoria.

Primeiro calculamos: $\frac{20}{100}$ de 100 $\Leftrightarrow 0{,}2 \cdot 100 = 20$ (acréscimo)

Depois, somamos o valor inicial ao acréscimo:

R$ 100,00 + R$ 20,00 = R$ 120,00 (novo valor)

Outro modo de determinar o valor da mercadoria, após sofrer o acréscimo de 20%, é efetuando o cálculo:

$V = 100 + 0{,}2 \cdot 100 = 100 \cdot (1 + 0{,}2) = 100 \cdot (1{,}2) = 120$

Portanto, o novo valor é R$ 120,00.

Observe que o segundo modo apresentado o cálculo com apenas uma etapa. Esse modo pode ser assim generalizado: seja V_f o valor final da mercadoria, que é obtido pelo acréscimo ou pelo desconto de uma taxa percentual (representada por i), aplicada sobre o valor inicial (representado por V_0). Temos:

$$V_f = V_0 \cdot (1 \pm i)$$

Observação

- i representa a taxa percentual e deve ser utilizado na forma de número decimal. Por exemplo, 25% corresponde a 0,25.
- Se a variação é de aumento (valorização/acréscimo), usamos $1 + i$ na fórmula.
- Se a variação é de desconto (depreciação/decréscimo), usamos $1 - i$ na fórmula.

2.3 Aumentos e descontos sucessivos

São comuns as situações em que o valor de uma mercadoria se altera mediante aumentos ou descontos sucessivos. Vamos acompanhar a situação a seguir para entender como isso funciona.

Uma mercadoria cujo valor inicial V_0 é R$ 100,00 passa por dois aumentos sucessivos, um de 5% e outro de 12%, e depois sofre um desconto de 10%. Determinar o novo valor V_f da mercadoria.

Primeiro calculamos o valor após o 1º aumento:

$V_1 = 100 \cdot (1 + 0{,}05) = 100 \cdot 1{,}05 = 105{,}00$

O 2º aumento incide sobre R$ 105,00, e não mais sobre R$ 100,00:

$V_2 = 105 \cdot (1 + 0{,}12) = 105 \cdot 1{,}12 = 117{,}60$ (valor após o 2º acréscimo)

Finalmente o desconto é calculado sobre R$ 117,60. Então:

$V_f = 117{,}60 \cdot (1 - 0{,}10) = 117{,}60 \cdot 0{,}90 = 105{,}84$ (valor após todas as variações)

Vamos calcular V_f de outra maneira:

$V_f = 100 \cdot (1 + 0{,}05) \cdot (1 + 0{,}12) \cdot (1 - 0{,}10) = 100 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}12 \cdot 0{,}90 = 105{,}84$

Aqui, novamente, o segundo modo apresenta o cálculo em apenas uma etapa.

Logo, podemos dizer que, quando o valor inicial sofre variações sucessivas de taxas $i_1, i_2, i_3, ..., i_n$, o valor final é assim determinado:

$$V_f = V_0 \cdot (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot ... \cdot (1 \pm i_n)$$

Reflita

A mercadoria que sofre um aumento e um desconto à mesma taxa percentual apresenta, em relação ao valor inicial, um valor final maior, menor ou igual ao valor inicial? Explique sua resposta.

Ver resolução no Guia do professor.

Note, na situação anterior, que os dois aumentos e o desconto elevam o preço da mercadoria para R$ 105,84, o que equivale a um aumento de 5,84% sobre o valor inicial. A taxa de 5,84% é o que denominamos de **taxa acumulada**.

De modo geral, a taxa acumulada é dada por:

$$i_{\text{acumulada}} = (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot ... \cdot (1 \pm i_n) - 1$$

Assim:

$$1 + i_{\text{acumulada}} = (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot ... \cdot (1 \pm i_n)$$

Observação

- Quando ocorre um acréscimo no valor inicial, temos: $i_{\text{acumulada}} > 0$
- Quando ocorre um decréscimo no valor inicial, temos: $i_{\text{acumulada}} < 0$

Exercícios resolvidos

R1. Entre os especialistas do mercado automobilístico, é consenso que um automóvel zero-quilômetro sofre uma depreciação de 15% ao ano nos 3 primeiros anos, estabilizando-se num patamar inferior a esse nos anos seguintes. Se hoje um veículo custa R$ 34.000,00, qual será seu valor daqui a 3 anos, segundo a opinião desses especialistas?

▸ ***Resolução***

Como a taxa de depreciação é constante nos 3 anos, temos:

$V_f = 34.000 \cdot (1 - 0{,}15)^3 = 34.000 \cdot (0{,}85)^3 = 20.880{,}25$

Portanto, o valor do veículo será R$ 20.880,25 daqui a 3 anos.

R2. Um produto teve aumento total de preço de 61% por causa de dois aumentos sucessivos. Se o primeiro aumento foi de 15%, qual foi a taxa percentual do segundo aumento?

▸ ***Resolução***

61% representa a taxa acumulada que corrigiu o preço do produto.

Então:

$(1 + i_{\text{acumulada}}) = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (1 + 0{,}61) = (1 + 0{,}15) \cdot (1 + i_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow i_2 = 0{,}4$

Portanto, a taxa percentual do segundo aumento foi 40%.

Observação

- No caso de n aumentos iguais à taxa i, temos:

$$V_f = V_0 \cdot (1 + i)^n$$

- No caso de n descontos iguais à taxa i, temos:

$$V_f = V_0 \cdot (1 - i)^n$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Resolva o seguinte problema.
Se em um ônibus de 40 lugares há 24 passageiros sentados, qual é a porcentagem de lugares vazios? 40%

2. (UFSCar-SP) A companhia de eletricidade informou que, para cada hora de um mês de 30 dias, um bairro ficou, em média, 0,2 hora sem energia elétrica em algumas ruas. No mesmo período, uma residência localizada nesse bairro totalizou 18 horas sem energia elétrica. Em relação ao total de horas que alguma parte do bairro ficou sem eletricidade, o número de horas que essa residência ficou sem energia elétrica representa: alternativa d

a) 3,6% **b)** 9% **c)** 12% **d)** 12,5% **e)** 33,3%

3. Se o consumo mensal de energia elétrica de uma casa passou de 120 kWh para 156 kWh, qual foi a taxa percentual de aumento? 30%

4. Dos produtos de uma farmácia, 10% são de uso contínuo e, destes, 50% exigem receita médica. Qual é a taxa percentual dos produtos de uso contínuo que exigem receita médica? 5%

5. No primeiro dia de sua liquidação anual, uma loja de eletrodomésticos vendeu 40% do estoque de determinado produto; no segundo dia, vendeu 25% do restante. Que porcentagem do estoque do produto não foi vendida? 45%

6. Em países de economia instável, observa-se o fenômeno da inflação, que basicamente é a perda do valor de compra de sua moeda.

a) Se num país a inflação mensal é de 5%, qual é a taxa de inflação trimestral? ≃ 15,8%

b) Uma inflação de 44%, acumulada em 2 anos, corresponde a que inflação média ao ano? 20%

7. Com relação à dengue, o setor de vigilância sanitária de determinado município registrou as seguintes informações quanto ao número de casos positivos:

- em fevereiro, relativamente a janeiro, houve aumento de 10%;
- em março, relativamente a fevereiro, houve redução de 10%.

Discuta com um colega e respondam:

Esses dados indicam que, nesse município, houve aumento ou diminuição nos casos positivos da doença no período considerado? De quanto? diminuição de 1%

8. Junte-se a um colega e respondam à questão.

(UFRJ) Das 100 pessoas que estão em uma sala, 99% são homens. Quantos homens devem sair para que a porcentagem de homens na sala passe a ser 98%? 50 homens

2.4 Lucro e prejuízo

De maneira geral, podemos entender **lucro** como o ganho obtido de uma operação comercial que é gerado pela diferença entre o preço de venda de determinada mercadoria e seu preço de custo (compra). Caso uma mercadoria seja vendida por um preço menor do que seu custo, diz-se que ela gerou **prejuízo**, o que também pode ser entendido como **lucro negativo**.

Sejam P_v o preço de venda, P_c o preço de compra e L o lucro, podemos representar:

$$L = P_v - P_c$$

Observação

Se $P_v - P_c$ for negativo, ou seja, se $L < 0$, dizemos que houve prejuízo.

Exercícios resolvidos

R3. Um produto tem preço de custo de R$ 160,00 e é vendido por R$ 200,00. Qual é a porcentagem do lucro sobre o preço de custo? E sobre o preço de venda?

▸ ***Resolução***

Sendo $L = P_v - P_c$, temos:

$L = 200 - 160 \Rightarrow L = 40$

Portanto, o lucro é R$ 40,00.

A porcentagem do lucro sobre o preço de custo é:

$$\frac{L}{P_c} = \frac{40}{160} = 0{,}25 = 25\%$$

A porcentagem do lucro sobre o preço de venda é:

$$\frac{L}{P_v} = \frac{40}{200} = 0{,}20 = 20\%$$

Observação

O lucro em uma operação comercial pode ser calculado como uma porcentagem tanto do preço de custo quanto do preço de venda. Quando, no enunciado de um problema, não se menciona se o lucro se refere ao custo ou ao preço de venda, admitimos que deve ser calculado sobre o preço de custo.

R4. Um objeto, ao ser renegociado, foi vendido por R$ 10.000,00, com prejuízo de 20% sobre o preço de compra original. Por quanto o objeto havia sido comprado?

▸ ***Resolução***

Do enunciado temos:

$P_v = P_c - P_c \cdot 0{,}2 = (1 - 0{,}2) \cdot P_c \Rightarrow P_v = 0{,}8 \cdot P_c$

Como $P_v = 10.000$, então:

$10.000 = 0{,}8 \cdot P_c \Rightarrow P_c = 12.500$

Portanto, o objeto havia sido comprado por R$ 12.500,00.

R5. Ao vender uma mercadoria, um indivíduo teve lucro de 40% em relação ao preço de venda. Qual foi a porcentagem do lucro em relação ao preço de custo?

▸ ***Resolução***

Do enunciado temos: $\frac{L}{P_v} = 0{,}4 \Rightarrow L = 0{,}4 \cdot P_v$

Sabemos que $L = P_v - P_c$; então vamos escrever P_c em função de P_v:

$0{,}4 \cdot P_v = P_v - P_c \Rightarrow P_c = 0{,}6 \cdot P_v$

Como queremos saber $\frac{L}{P_c}$, calculamos:

$$\frac{L}{P_c} = \frac{0{,}4 \cdot P_v}{0{,}6 \cdot P_v} = \frac{4}{6} \simeq 0{,}67 = 67\%$$

Logo, em relação ao preço de custo, a porcentagem do lucro é próxima de 67%.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

9. Um automóvel custou R$ 20.000,00. Por quanto deve ser vendido para que haja um lucro de 6% sobre o preço de custo? R$ 21.200,00

10. Comprei um terreno pelo valor de R$ 34.500,00 e o vendi por R$ 38.640,00. Qual foi a taxa de lucro que obtive em relação ao valor de compra do terreno? 12%

11. Arrependida da compra de uma esteira ergométrica, Débora vendeu-a para Ana Paula com prejuízo de 15% em relação ao preço pago na loja. Em seguida, Ana Paula vendeu-a para Fernando por R$ 1.955,00, obtendo lucro de 15% sobre o preço que pagou. Quantos reais Fernando pagaria a mais se tivesse comprado na mesma loja em que Débora comprou? R$ 45,00

12. Um comerciante compra um produto por R$ 28,00 a unidade e o revende com lucro igual a 20% do preço de venda. Qual é o preço de venda do produto? E se o lucro fosse de 20% do preço de custo? R$ 35,00; R$ 33,60

13. Um vendedor repassa seus produtos ao consumidor com lucro de 60% em relação ao preço de venda. Qual é a taxa de lucro do comerciante em relação ao preço de custo? 150%

14. Faça os cálculos e responda às questões.

Ao fazer uma poltrona, um tapeceiro gasta R$ 97,00 com material e 12 horas de trabalho. Para calcular o preço de venda, ele acrescenta, ao valor gasto com material, R$ 15,00 por hora de trabalho. Um comerciante compra as poltronas desse tapeceiro e as revende com acréscimo de 75% para pagamento a prazo.

a) Qual é o valor cobrado pelo comerciante para a venda a prazo de uma dessas poltronas? R$ 484,75

b) Para o pagamento à vista, o comerciante dá um desconto de 10%. Qual é a porcentagem de lucro do comerciante para pagamento à vista? 57,5%

15. A valorização de uma ação foi de 38% em dois meses. Qual foi sua valorização no 2º mês se, no 1º mês, a valorização foi de 15%? 20%

16. Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo 44% superior ao preço de custo. Mas prepara a tabela de preços de venda acrescentando 80% ao preço de custo, porque sabe que o cliente gosta de obter algum desconto no momento da compra. Qual é o maior desconto que pode conceder ao cliente, sobre o preço da tabela, de modo que não tenha prejuízo? desconto de 20%

3 Juro simples

Quando se aplica ou se pede emprestado um valor em dinheiro (**capital**), geralmente se recorre a uma instituição financeira. **Juro** é a remuneração que se recebe da instituição no caso de uma aplicação, ou a que deve ser paga a ela no caso de um empréstimo. **Montante** é a quantidade de dinheiro que o investidor possui após o recebimento do juro.

Ao se aplicar um capital por determinado tempo, a certa taxa de juro constante, o montante pode crescer ou diminuir segundo dois regimes: o de juro simples e o de juro composto.

No regime de **juro simples**, o juro incide apenas sobre o capital investido, e o montante resgatado nesse regime depende do capital, do tempo de aplicação e da taxa de juro. Para compreender essa situação, acompanhe a resolução do problema de Marcelo apresentado na página 8.

Segundo a situação, Marcelo deve optar entre pedir um empréstimo de R$ 5.226,00 (a ser pago após 3 meses, com juro simples de 2,6% ao mês) para quitar as dívidas hoje, ou esperar para pagar a dívida no valor de R$ 5.670,21 após os 3 meses, com o dinheiro da indenização que irá receber.

No empréstimo, o juro cobrado após 1 mês é dado por: $J = 5.226 \cdot 0{,}026 \simeq 135{,}88$

No sistema de juro simples, para calcular o juro cobrado após 3 meses, basta multiplicar por 3 o juro cobrado após 1 mês: $J = 5.226 \cdot 0{,}026 \cdot 3 \simeq 407{,}63$

O montante que deverá ser pago, após 3 meses do empréstimo, será:
$M =$ R$ 5.226,00 + R$ 407,63 = R$ 5.633,63

Logo, a melhor opção é pedir o empréstimo e, assim, pagá-lo com o valor da indenização (R$ 5.670,21) e economizar R$ 36,58.

De modo geral, sendo C o capital, i a taxa percentual de juro, t o tempo de investimento, J o juro e M o montante, temos:

- Juro obtido ao fim de um período: $C \cdot i$
- Juro obtido ao fim de t períodos: $C \cdot i \cdot t$

Considerando J o juro obtido após t períodos e M o montante, podemos escrever:

$$J = C \cdot i \cdot t \qquad M = C + J$$

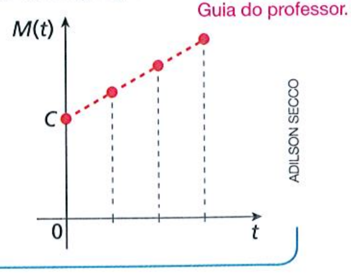
Como $J = C \cdot i \cdot t$ e $M = C + J$, então:

$$M = C + C \cdot i \cdot t \Rightarrow \boxed{M = C(1 + i \cdot t)}$$

Para o cálculo do juro, o tempo e a taxa devem sempre estar na mesma unidade. Por exemplo, se a taxa é mensal, o tempo deve ser contado em mês. Em cálculos contábeis, aplica-se o **ano comercial** com 360 dias, sendo 12 meses de 30 dias cada.

Reflita

Para valores de t inteiros não negativos, em regime de juro simples, a aplicação cresce mensalmente a uma razão aditiva constante. O capital aplicado e os montantes nos meses seguintes ao da aplicação formam uma **progressão aritmética**. Qual é a razão dessa progressão? Ver resolução no Guia do professor.



ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercício resolvido

R6. Um investidor aplica R$ 1.000,00 a juro simples de 2% ao mês. Determinar a taxa equivalente ao ano, o juro recebido após 1 mês e após 5 meses, e o montante após 8 meses.

▶ ***Resolução***

A taxa equivalente ao ano, no regime de juro simples, é:

$$i_{a.a.} = 12 \cdot i_{a.m.} \Rightarrow i_{a.a.} = 12 \cdot 2\% = 24\%$$

O juro recebido após 1 mês pode ser calculado por meio da taxa equivalente ao mês:

$$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = \text{R\$ } 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 1 \Rightarrow J = \text{R\$ } 20{,}00$$

O juro recebido após 5 meses da aplicação pode ser calculado por meio da taxa equivalente ao ano, utilizando a fração do ano correspondente ao número de meses dados: 5 meses $\Rightarrow \dfrac{5}{12}$ do ano

$$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = \text{R\$ } 1.000 \cdot 0{,}24 \cdot \frac{5}{12} \Rightarrow J = \text{R\$ } 100{,}00$$

Para obter o montante após 8 meses de aplicação, calcula-se primeiro o juro no período: $J = \text{R\$ } 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 8 \Rightarrow J = \text{R\$ } 160{,}00$

Depois, soma-se ao capital:

$$M = C + J \Rightarrow M = \text{R\$ } 1.000 + \text{R\$ } 160 \Rightarrow M = \text{R\$ } 1.160{,}00$$

Observação

Abrevia-se "ao ano" por a.a., "ao mês" por a.m. e "ao dia" por a.d. Considerando o ano comercial, temos:

$$i_{\text{a.a.}} = 12 \cdot i_{\text{a.m.}} = 360 \cdot i_{\text{a.d.}}$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

17. Uma aplicação de R$ 2.000,00 é feita a juro simples de 24% a.a.

a) Qual será o montante após 3 anos de aplicação? R$ 3.440,00

b) Escreva uma expressão que forneça o montante da aplicação em função do número n de anos decorridos após a aplicação. $M = 2.000 + 480n$

c) Faça o gráfico do montante em função do prazo n da aplicação, expresso em anos.
Ver gráfico no Guia do professor.

18. Durante quanto tempo um capital aplicado a juro simples de 15% a.a. deve permanecer investido para que renda juro igual a 50% de seu valor?
3 anos e 4 meses

19. Um investidor aplicou na mesma data, por 3 meses e a juro simples, os capitais de R$ 110.000,00 e de R$ 80.000,00 em instituições diferentes. O maior capital foi aplicado à taxa de 6% a.m. e rendeu, de juro, R$ 10.200,00 a mais que o menor. Qual foi a taxa de juro da aplicação do menor capital? 4%

20. Carina aplicou, no início do ano, 25% de suas economias em um fundo de investimentos e o restante em um fundo de ações. Após 1 ano, a rentabilidade do fundo de investimentos foi 16% e a do fundo de ações, 26%.

a) Se o saldo do fundo de investimentos (FI), após 1 ano da data de aplicação, foi R$ 29.000,00, qual foi o valor aplicado no FI? R$ 25.000,00

b) Qual foi a rentabilidade global dessas aplicações? 23,5%

21. Carlos adquiriu uma moto nas seguintes condições: uma entrada de R$ 2.000,00 mais uma única parcela de R$ 4.500,00, paga 2 meses após a compra. Sabendo que o preço à vista da moto é R$ 6.000,00, responda às questões.

SERGIO CASTRO/AGÊNCIA ESTADO

Moto em exposição em estande do Salão Duas Rodas, São Paulo, 2011.

a) Qual a taxa mensal de juro simples do financiamento? 6,25%

b) Após quantos meses da compra deveria vencer a parcela de R$ 4.500,00 para que a taxa de juro simples do financiamento fosse de 2,5% ao mês? 5 meses

4 Juro composto

4.1 Regime de juro composto

No regime de **juro composto**, o rendimento obtido ao final de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem ao montante. Dessa forma, calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior, o que chamamos de "juro sobre juro". Essa é a modalidade de remuneração mais empregada pelas instituições financeiras.

Os cálculos envolvidos na resolução de problemas de juro composto em geral são trabalhosos, por isso recomenda-se o auxílio de uma calculadora.

Acompanhe, na tabela abaixo, a evolução do montante gerado pelo investimento de R$ 1.000,00 à taxa de 2% ao mês sob os dois regimes de capitalização aqui estudados:

Período	Juro simples	Juro composto
início	$M_0 = 1.000$	$M_0 = 1.000$
após 1 mês	$M_1 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 1 \Rightarrow M_1 = 1.020$	$M_1 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_1 = 1.020$
após 2 meses	$M_2 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 2 \Rightarrow M_2 = 1.040$	$M_2 = 1.020 + 1.020 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_2 = 1.040{,}40$
após 3 meses	$M_3 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 3 \Rightarrow M_3 = 1.060$	$M_3 = 1.040{,}40 + 1.040{,}40 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_3 \simeq 1.061{,}21$
após 4 meses	$M_4 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 4 \Rightarrow M_4 = 1.080$	$M_4 = 1.061{,}21 + 1.061{,}21 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_4 \simeq 1.082{,}43$
após 5 meses	$M_5 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 5 \Rightarrow M_5 = 1.100$	$M_5 = 1.082{,}43 + 1.082{,}43 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_5 \simeq 1.104{,}08$
após t meses	$M_t = 1.000 \cdot (1 + 0{,}02t)$	$M_t = 1.000 \cdot (1 + 0{,}02)^t$

Vamos detalhar os cálculos feitos na coluna do juro composto ao final de cada mês. Para isso, considere o capital investido C, a taxa de juro composto i e o período de aplicação t.

- após 1 mês: $M_1 = C + Ci \Rightarrow M_1 = C(1 + i)$
- após 2 meses: $M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1 + i) \Rightarrow M_2 = C(1 + i) \cdot (1 + i) = C(1 + i)^2$
- após 3 meses: $M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1 + i) \Rightarrow M_3 = C(1 + i)^2 \cdot (1 + i) = C(1 + i)^3$

$\vdots$

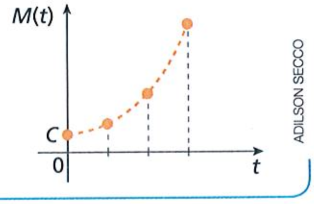
- após t meses: $M_t = M_{t-1} + M_{t-1} \cdot i = M_{t-1}(1 + i) \Rightarrow$
  $\Rightarrow M_t = C(1 + i)^{t-1} \cdot (1 + i) = C(1 + i)^t$

Então, podemos calcular o montante resultante dessa aplicação da seguinte forma:

$$M = C(1 + i)^t$$

Reflita

Para valores de t inteiros, em regime de juro composto, a aplicação cresce mensalmente a uma razão multiplicativa constante. O capital aplicado e os montantes nos meses seguintes ao da aplicação formam uma **progressão geométrica**, mostrada no gráfico abaixo. Qual é a razão dessa progressão?



ADILSON SECCO

Ver resolução no Guia do professor.

Exercícios resolvidos

R7. Com um capital de R$ 1.500,00 foi feita uma aplicação que rende juro composto de 1,2% ao mês. Qual será o saldo (montante) dessa aplicação após 6 meses se, durante esse período, não houver nenhuma outra movimentação na conta?

▸ ***Resolução***

Aplicando a fórmula do juro composto, temos:

$$M = 1.500 \cdot \left(1 + \frac{1{,}2}{100}\right)^6 \Rightarrow M = 1.500 \cdot (1{,}012)^6$$

Utilizando uma calculadora, obtemos $M \simeq$ R$ 1.611,29.

R8. Uma dívida contraída a juro composto aumenta 69% em dois meses. Qual é a taxa mensal de juro?

▸ ***Resolução***

É importante perceber que 69% é a taxa acumulada em dois meses para essa dívida.

$(1 + 0{,}69) = (1 + i_{a.m.})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + i_{a.m.} = \sqrt{1{,}69} \Rightarrow i_{a.m.} = 30\%$

R9. Uma loja oferece as seguintes alternativas para o pagamento de uma mercadoria:

- à vista, com 3% de desconto sobre o preço de tabela;
- com cheque pré-datado para 30 dias, no valor de tabela da mercadoria.

Considerando que um consumidor tenha dinheiro para comprar a mercadoria à vista e que esse dinheiro possa ser aplicado numa instituição financeira à taxa de 0,8% a.m., qual a opção mais vantajosa para comprar nessa loja? Explique.

▸ ***Resolução***

Seja P_t o preço de tabela da mercadoria e P_v o seu preço à vista; temos: $P_v = 0{,}97 \cdot P_t$ (desconto de 3% sobre o preço de tabela)

O valor à vista da mercadoria será aplicado e produzirá um montante, após 1 mês, de:

$M = 0{,}97 \cdot P_t \cdot (1 + 0{,}008) \Rightarrow M = 0{,}97776 \cdot P_t$

O valor do resgate é insuficiente para saldar o cheque pré-datado, pois: $0{,}97776 \cdot P_t < P_t$

Logo, é mais vantajoso para o consumidor pagar a mercadoria à vista.

Reflita

Qual é o menor valor da taxa de juro que a aplicação deveria ter para que a decisão de pagar em 30 dias fosse mais vantajosa? Ver resolução no Guia do professor.

R10. O valor de uma máquina sofre depreciação anual de 25%. Se ela custa hoje R$ 2.000,00, daqui a quantos anos valerá metade do que vale hoje? (Adote log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48.)

▸ ***Resolução***

Aplicando a fórmula do juro composto, a definição e as propriedades operatórias dos logaritmos, temos:

$$1.000 = 2.000 \cdot (1 - 0{,}25)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0{,}75)^t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \log_{0{,}75}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$t = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\,(0{,}75)} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)} =$$

$$= \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - \log 4} = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - \log 2^2} =$$

$$= \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - 2 \cdot \log 2}$$

Como log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, temos:

$$t = \frac{0 - 0{,}30}{0{,}48 - 2 \cdot 0{,}30} = \frac{-0{,}30}{-0{,}12} = 2{,}5$$

A máquina terá seu valor reduzido à metade em 2 anos e meio, contados a partir de hoje.

Observação

Satisfeitas as condições de existência dos logaritmos, são válidas as seguintes propriedades:

- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

22. Alfredo costuma aplicar seu dinheiro em um fundo de investimento que rende juro composto. Quanto deverá aplicar hoje para ter um montante de R$ 13.310,00 daqui a 3 anos, se a taxa de juro for 10% a.a.? R$ 10.000,00

23. (UEL-PR) Um empresário comprou um apartamento com intenção de investir seu dinheiro. Sabendo-se que esse imóvel valorizou 12% ao ano, é correto afirmar que seu valor duplicou em, aproximadamente: alternativa e

(*Dados*: $\log_{10} 2 \simeq 0{,}30$ e $\log_{10} 7 \simeq 0{,}84$)

a) 3 anos
b) 4 anos e 3 meses
c) 5 anos
d) 6 anos e 7 meses
e) 7 anos e 6 meses

24. Um capital de R$ 1.500,00 foi aplicado a juro composto à taxa de 2% ao mês. Ao completar 2 meses de aplicação, o montante foi retirado e aplicado a juro simples à taxa de 5% ao mês. Se, após certo prazo, o montante final era R$ 1.950,75, qual foi o prazo da segunda aplicação? 5 meses

25. Certo capital duplica em 2 meses de aplicação no regime de juro composto. Qual é aproximadamente a taxa de juro mensal desse investimento? 41%

26. Em 3 anos, o crescimento do setor agroindustrial de certa região foi 700%. Qual foi a taxa de crescimento média por ano? Se a taxa de crescimento no primeiro ano foi 25% e a do segundo foi 100%, qual foi a taxa de crescimento no terceiro ano? 100% e 220%

27. Em uma loja, as vendas no ano de 2014 foram 40% superiores em relação ao ano de 2013. Em relação ao ano de 2014, as vendas de 2013 foram inferiores em que porcentagem? ≃ 29%

28. Um investidor aplicou R$ 4.000,00 em um fundo de ações que lhe causou um prejuízo, no primeiro mês, de 40% sobre o total do investimento. Na tentativa de recuperar o dinheiro perdido, aplicou o montante da primeira aplicação por um prazo de 60 dias a uma taxa de 20% a.m. Esse investidor conseguiu recuperar o dinheiro investido? Após a segunda aplicação, qual foi a taxa percentual do montante em relação aos R$ 4.000,00 aplicados? não; 86,4%

29. Uma geladeira é vendida em uma loja de eletrodomésticos em 3 parcelas iguais de R$ 280,00, sendo a primeira no ato da compra e as demais vencendo em 30 e 60 dias após a compra. Qual é o valor da geladeira à vista se a loja está cobrando 3% de juros ao mês?

29. b) ≃ R$ 271,84 **c)** ≃ R$ 263,93

Para resolver esse exercício, responda aos itens a seguir.

a) Qual é o valor pago no ato da compra (entrada)? R$ 280,00

b) O valor pago daqui a 30 dias é o mesmo da entrada, porém, se ele fosse pago hoje, quanto seria?

c) Se a parcela que vence em 60 dias fosse paga no ato da compra, qual seria seu valor?

d) Determine o valor da geladeira à vista, conhecendo o valor das parcelas hoje. ≃ R$ 815,77

Situações desse tipo serão mais bem exploradas a seguir, no tópico "Atualização financeira".

ERNESTO RODRIGUES/AGÊNCIA ESTADO

Consumidor observa preço de refrigeradores durante período de redução do IPI sobre eletrodomésticos chamados linha branca (geladeiras, fogões, máquinas de lavar e tanquinhos), São Paulo, 2009.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4.2 Atualização financeira

Já vimos que certo capital aplicado por um período t a juro composto tem seu valor calculado pela fórmula $M = C \cdot (1 + i)^t$. Observe a situação a seguir.

Um capital de R$ 500,00, aplicado, rende juro composto de 2% a.m. e produz os montantes a seguir.

- Após 1 mês: $M_1 = 500 \cdot (1 + 0{,}02) \Rightarrow M_1 = 510{,}00$
- Após 2 meses: $M_2 = 500 \cdot (1 + 0{,}02)^2 \Rightarrow M_2 = 520{,}20$
- Após 3 meses: $M_3 = 500 \cdot (1 + 0{,}02)^3 \Rightarrow M_3 \simeq 530{,}60$

E assim sucessivamente.

Observe que, ao projetarmos o valor de uma aplicação ou de uma dívida, devemos multiplicar o valor presente pelo fator $(1 + i)^t$.

Vamos analisar agora o que ocorre na situação inversa, ou seja, a de uma dívida cujo valor já está calculado com juro composto embutido, que vence daqui a um tempo, mas tem seu pagamento antecipado. Veja a situação a seguir.

Uma loja vende um aparelho de som por R$ 505,62 para pagamento com cheque pré-datado para 60 dias. Se a loja está cobrando juro de 6% ao mês no crediário, qual é o preço à vista do aparelho?

Para saber o preço à vista do aparelho, devemos atualizar seu preço monetariamente, isto é, devemos calcular o valor presente do aparelho. Para isso, devemos "tirar" o juro embutido no preço final da mercadoria.

Utilizando $M = C \cdot (1 + i)^t$, temos:

$$505{,}62 = C \cdot (1 + 0{,}06)^2 \Rightarrow C = \frac{505{,}62}{(1{,}06)^2} \Rightarrow C = 450$$

Portanto, o preço à vista do aparelho é R$ 450,00.

Observe que agora, para trazer o valor da mercadoria para o presente, dividimos o valor no futuro pelo fator $(1 + i)^t$. Normalmente, nesta etapa do nosso estudo, alteramos a classificação de montante (M) para dívida (D) e de capital (C) para valor presente (VP). Assim, temos: $D = VP \cdot (1 + i)^t$

Logo, o valor presente é dado por:

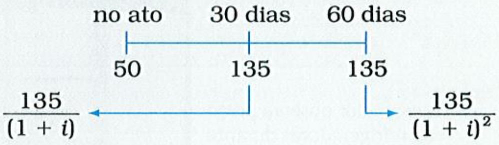
$$VP = \frac{D}{(1 + i)^t}$$

Exercícios resolvidos

R11. Um grande magazine anuncia a venda de uma bicicleta por R\$ 300,00 à vista, ou R\$ 50,00 de entrada e mais 2 pagamentos mensais de R\$ 135,00. Qual é a taxa mensal de juro no plano a prazo?
(*Utilizar*: $\sqrt{6.129} = 78$)

▸ ***Resolução***

Observe o esquema da situação:



Nesse caso, temos:

$$50 + \frac{135}{(1+i)} + \frac{135}{(1+i)^2} = 300$$

Fazendo $(1 + i) = k$, temos:

$$50 + \frac{135}{k} + \frac{135}{k^2} = 300$$

$$250k^2 - 135k - 135 = 0$$

Portanto, $k \simeq 1{,}05$ ou $k \simeq -0{,}51$ (não convém).

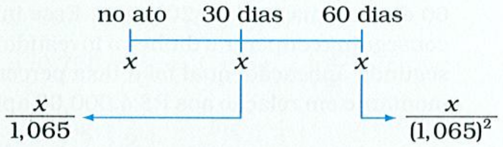
Logo, $1 + i \simeq 1{,}05$, ou seja, $i \simeq 0{,}05$.

Portanto, a taxa de juro no plano a prazo é de aproximadamente 5% a.m.

R12. Uma compra de R\$ 600,00 vai ser paga em 3 parcelas mensais e iguais, sendo a primeira à vista. Determinar o valor de cada parcela sabendo que a loja cobra juro de 6,5% a.m.

▸ ***Resolução***

Observe o esquema:



A soma da entrada (o que é pago no ato da compra) com as demais parcelas atualizadas monetariamente (descontado o juro) fornece o valor da compra à vista:

$$x + \frac{x}{1{,}065} + \frac{x}{(1{,}065)^2} = 600$$

$$(1{,}065)^2x + 1{,}065x + x = (1{,}065)^2 \cdot 600$$

$$3{,}199225x = 680{,}535$$

$$x \simeq 212{,}72$$

Logo, cada parcela do financiamento vale, aproximadamente, R\$ 212,72.

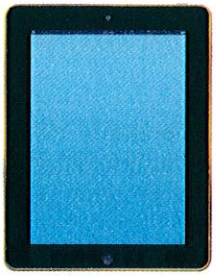
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

30. Um imóvel, no valor total de R\$ 364.000,00, vai ser pago em 3 parcelas anuais iguais, sendo a primeira à vista. Qual é o valor de cada parcela se está sendo cobrado juro de 20% ao ano na segunda e na terceira parcela? R\$ 144.000,00

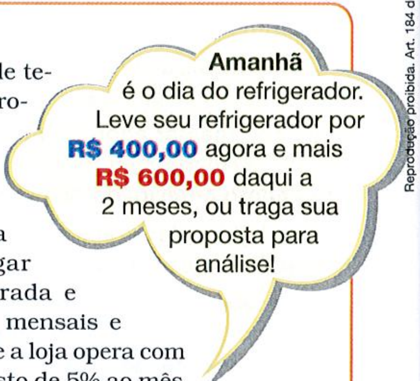
31. Um ventilador que custa R\$ 100,00 à vista é vendido num grande magazine em 2 parcelas iguais de R\$ 60,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda a vencer em 30 dias. Qual é a taxa mensal de juro cobrada pela loja? 50%

32. Um *tablet* custa R\$ 800,00 à vista, ou zero de entrada e mais 2 parcelas iguais de R\$ 430,00 cada uma, com vencimentos em 30 e 60 dias após a compra (plano 0 + 2).


YURIY KULYK/SHUTTERSTOCK

Qual é a taxa mensal de juro cobrada pela loja nesse plano de pagamento? 5%
(*Utilize*: $\sqrt{15.609} = 125$)

33. Em um comercial de televisão, o garoto-propaganda anuncia:


Amanhã é o dia do refrigerador. Leve seu refrigerador por R\$ 400,00 agora e mais R\$ 600,00 daqui a 2 meses, ou traga sua proposta para análise!

Um consumidor, ouvindo a propaganda, foi até a loja e propôs pagar R\$ 400,00 de entrada e mais 2 prestações mensais e iguais. Sabendo que a loja opera com taxa de juro composto de 5% ao mês, qual deve ser o valor de cada prestação para que os dois planos sejam equivalentes? ≃ R\$ 292,68

34. No dia 15/7/2013, João contraiu uma dívida, com a promessa de quitá-la em 15/7/2014, mediante um único pagamento de R\$ 208.080,00. Nessa quantia já está incluso o juro composto correspondente aos 12 meses, à taxa mensal de 2%. Hoje, ele entrou em contato com o credor, mostrando interesse em liquidar sua dívida no dia 15/5/2014, desde que a dívida seja recalculada com a retirada do juro correspondente aos 2 meses de antecipação. Supondo que o credor concorde com João, quanto ele terá de pagar? R\$ 200.000,00

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. (Mackenzie-SP) O setor de recursos humanos de uma empresa entrevistou candidatos a empregos, sendo $\frac{2}{3}$ a razão entre o número de aprovados e o de reprovados. Dos entrevistados, foram aprovados: alternativa d

a) 30% **b)** 32% **c)** 36% **d)** 40% **e)** 45%

2. Um técnico de laboratório manipula dois recipientes que contêm misturas das substâncias A e B. Embora os volumes das misturas sejam iguais, em um dos recipientes a razão de A para B é $\frac{1}{2}$ e no outro é $\frac{3}{4}$. Se o técnico juntar os dois conteúdos em um único recipiente, quais passarão a ser as porcentagens da substância A e da substância B em relação ao volume total da mistura? A: $\simeq$ 38,1%
B: $\simeq$ 61,9%

3. Antes de colocar certo produto à venda, um comerciante aumentou o preço em 20%. Se o desconto no ato da venda também for de 20%, que porcentagem do preço inicial o comprador pagará pelo produto? 96%

4. Em uma sessão de ginástica de uma academia, 25% dos presentes são do sexo feminino. Se 3 moças se retirarem, a porcentagem passará a ser 20%. Quantas moças continuarão na sessão de ginástica? 12 moças

5. (Fuvest-SP) Um reservatório com 40 ℓ de capacidade já contém 30 ℓ de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool. A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de: alternativa d

a) 20% **b)** 22% **c)** 24% **d)** 26% **e)** 28%

6. (PUC) Em uma indústria é fabricado certo produto ao custo de R$ 9,00 a unidade. O proprietário anuncia a venda desse produto ao preço unitário de x reais, para que possa, ainda que dando ao comprador um desconto de 10% sobre o preço anunciado, obter um lucro de 40% sobre o preço unitário de custo. Nessas condições, o valor x é: alternativa d

a) 24 **b)** 18 **c)** 16 **d)** 14 **e)** 12

7. (Enem) Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
Poupança	0,560	Isento
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é: alternativa d

a) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.
b) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.
c) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.
d) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.
e) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

8. (Fuvest-SP) O número de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foi 5, 3, 1, 4, 0, 2. Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nessa rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada? 18 gols

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

BANCO CENTRAL DO BRASIL

9. Em um período em que a inflação é 25%, qual será a perda do poder aquisitivo da moeda? 20%

10. A que taxa anual um capital deve ser aplicado, a juro simples, para triplicar num prazo de 72 dias? 1.000% a.a.

11. Um contrato estabelece a aplicação, a juro simples, de $\frac{2}{3}$ de um capital à taxa de 6% a.m., durante 2 meses; o restante à taxa de 4,5% a.m., também a juros simples, durante 3 meses. Para que a aplicação de todo o capital consiga ter em 3 meses a mesma rentabilidade, qual deve ser a taxa anual? 50%

12. Calcule o juro simples de R$ 168,00, à taxa de 1,1% ao mês, em 0,12 ano. ≃ R$ 2,66

13. (Faap-SP) Um investimento de R$ 24.000,00 foi aplicado parte a juro simples de 1,8% ao mês e parte a 3% ao mês. Se o juro mensal é igual a R$ 480,00, quais são as partes correspondentes do investimento? R$ 20.000,00; R$ 4.000,00

14. Para um período de 2 meses, quais são as taxas de juro simples mensal equivalentes às taxas de juro composto mensal de 10%, 20% e 40%? 10,5%; 22%; 48%

15. (FGV) Uma aplicação financeira rende juros de 10% ao ano, compostos anualmente.

x	2	5	11
$\log x$	0,30	0,70	1,04

Utilizando para os cálculos as aproximações fornecidas na tabela, pode-se afirmar que uma aplicação de R$ 1.000,00 seria resgatada no montante de R$ 1.000.000,00 após: alternativa e

a) mais de 1 século
b) 1 século
c) $\frac{4}{5}$ de século
d) $\frac{2}{3}$ de século
e) $\frac{3}{4}$ de século

16. Em 1º de abril de determinado ano, um artigo que custava R$ 250,00 teve seu preço diminuído em p% de seu valor. Em 1º de maio do mesmo ano, o novo preço foi diminuído em p% do seu valor, passando, então, a R$ 211,60. Utilizando uma calculadora, determine o valor de p. 8

17. Quanto uma pessoa deve aplicar hoje, a juro composto com taxa de 1,4% ao mês, para poder pagar uma dívida de R$ 3.600,00 daqui a 3 meses? E uma dívida de R$ 8.700,00 daqui a 5 meses? ≃ R$ 3.452,94; ≃ R$ 8.115,77

18. (FGV) No regime de juro composto, a taxa de juro anual que produz um montante 44% superior ao capital inicial, no prazo de aplicação de 2 anos, é: alternativa a

a) 20% **b)** 21,5% **c)** 21% **d)** 20,5% **e)** 22%

19. Uma mercadoria é vendida em 3 parcelas iguais de R$ 320,00, sem entrada. Se a taxa de juro do financiamento for 5% ao mês, qual será o valor dessa mercadoria se for paga à vista? ≃ R$ 871,44

Aprofundamento

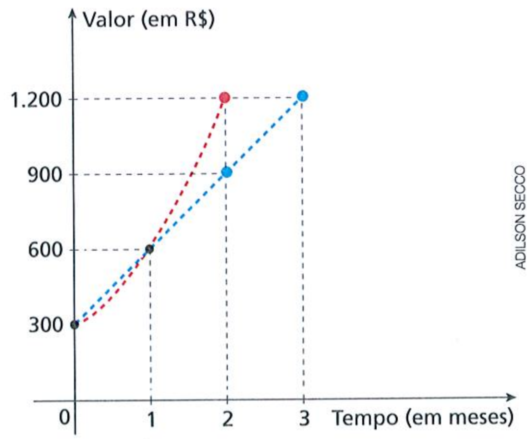
20. (Vunesp) Uma loja vende um produto no valor de R$ 200,00 e oferece duas opções de pagamento aos clientes: à vista, com 10% de desconto, ou em 2 prestações mensais de mesmo valor, sem desconto, a primeira sendo paga no momento da compra. A taxa mensal de juro embutida na venda a prazo é: alternativa d

a) 5% **b)** 10% **c)** 20% **d)** 25% **e)** 90%

21. Observe os gráficos ao lado. Um deles representa a aplicação de R$ 300,00 a juro composto, e o outro, a aplicação desse mesmo valor a juro simples.

a) No regime de juro composto, qual será o montante após 3 meses? R$ 2.400,00

b) Após que mês é menos vantajoso o regime de juro simples? após o 1º mês



ADILSON SECCO

22. Em determinado ano, nos meses de janeiro, fevereiro e março as taxas de inflação foram, respectivamente, de 1,2%, 0,8% e 1,3%. Qual foi a taxa de inflação acumulada nesse primeiro trimestre? E qual deve ser a taxa máxima de inflação de abril para que a taxa acumulada no quadrimestre seja de, no máximo, 4%. $\simeq 3{,}34\%$ e $\simeq 0{,}64\%$

23. (UFC-CE) Uma pessoa, dispondo de 60.000 reais, aplica parte dessa quantia no banco A, a uma taxa de juro simples de 5% ao ano. O restante é aplicado no banco B, a uma taxa de juro simples de 7% ao ano. Depois de 1 ano verificou-se que as quantias aplicadas tiveram o mesmo rendimento. Pode-se afirmar, corretamente, que a quantia aplicada no banco A, em reais, foi: alternativa e

a) 19.000
b) 20.000
c) 27.000
d) 30.000
e) 35.000

24. (UFABC-SP) Um investidor aplicou uma certa quantia durante 10 meses, sendo 60% dessa quantia a uma taxa de juro simples de 30% ao ano e 40% a uma taxa de juro simples de 24% ao ano, recebendo, de juros, um total de R$ 1.150,00. Determine a quantia total aplicada. R$ 5.000,00

Desafio

25. Um supermercado negocia com seus fornecedores 150.000 unidades de determinado produto. Na 1ª semana de vendas, o público consumiu $\frac{2}{3}$ das unidades, com lucro unitário de 30% sobre o custo para o supermercado, e na semana seguinte consumiu todas as restantes, com lucro unitário de 15% sobre o custo. Qual foi a taxa percentual média do lucro do supermercado nessas vendas? 25%

ALEXANDRE TOKITAKA/PULSAR IMAGENS

Supermercado no bairro Pompeia, São Paulo, 2011.

26. (Ibmec-SP) Se x reais forem investidos em determinada aplicação, então o rendimento gerado por essa aplicação e o imposto que irá incidir sobre esse rendimento serão ambos iguais a x%. O maior valor de x para o qual essa aplicação não gera prejuízo é: alternativa c

a) R$ 50,00
b) R$ 83,33
c) R$ 100,00
d) R$ 125,80
e) R$ 161,80

Autoavaliação

Leia atentamente as questões a seguir e responda-as em seu caderno.

1. Em uma sala de aula, a razão entre o número de meninos e o número de meninas é $\frac{3}{5}$. Em relação ao total de alunos na sala, a porcentagem de meninas é: alternativa c

a) 37,5%
b) 60%
c) 62,5%
d) 40%

2. Na composição do feijão, 22% são proteínas. A massa de proteínas, em grama, existente em 300 g de feijão é: alternativa a

a) 66
b) 132
c) 156
d) 660

3. Ao comprar uma bicicleta de R$ 950,00 com desconto de 18%, o cliente pagará: alternativa c

a) R$ 932,00
b) R$ 968,00
c) R$ 779,00
d) R$ 171,00

4. Após um aumento de 15%, um produto passou a ser vendido por R$ 48,30. O preço desse produto, antes do aumento, era: alternativa b

a) R$ 33,30
b) R$ 42,00
c) R$ 43,30
d) R$ 32,00

5. Um aparelho de TV cujo preço original é R$ 1.000,00 está sendo vendido por R$ 885,00. Assim, a loja está oferecendo um: alternativa d

a) aumento de 88,5%
b) desconto de 88,5%
c) aumento de 11,5%
d) desconto de 11,5%

6. Uma loja vende um produto no valor de R$ 150,00 e oferece duas opções de pagamento aos clientes: à vista com 10% de desconto ou, sem desconto, em 2 parcelas iguais, sendo uma no ato da compra e outra 30 dias depois. A taxa de juro cobrada na compra parcelada é: alternativa d

a) 10%
b) 15%
c) 18%
d) 25%

7. Ao ser aplicado, um capital *C* aumentou em 3% no primeiro mês. No segundo mês, houve um desconto de 4% sobre o novo valor, obtendo o montante *M*. Podemos dizer que: alternativa b

a) houve lucro.
b) houve prejuízo.
c) *C* é igual a *M*.
d) *M* é maior que *C*.

8. No regime de ______, o juro incide apenas sobre o capital investido, e o montante resgatado nesse regime depende do capital, do tempo de aplicação e da taxa de juro. alternativa c

a) juro composto
b) aplicações sucessivas
c) juro simples
d) descontos sucessivos

9. ______ o rendimento obtido ao final de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem assim a um novo montante e, a partir daí, calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior. alternativa a

a) No regime de juro composto
b) No regime de juro simples
c) Em qualquer regime de capitalização
d) Não há regime de capitalização no qual

10. O salário líquido mensal de uma pessoa é R$ 3.000,00. Todo mês, ela poupa 10% de seu salário líquido e aplica esse valor em um fundo que rende juros compostos à taxa de 2% ao mês. O saldo dessa aplicação no dia em que faz o 3º depósito é: alternativa a

a) 918,12
b) 906,00
c) 903,00
d) 618,12

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

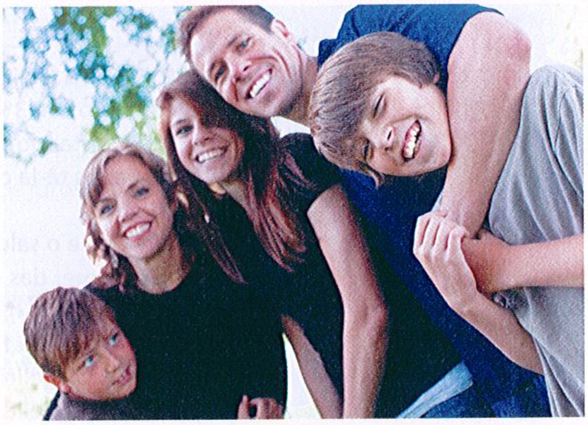
	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resolver problemas que envolvam taxa percentual.	X	X	X	X	X	X	X			X
Analisar e aplicar os regimes de juro simples e de juro composto.						X	X	X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	8 a 10	8 a 10	10 a 13	10 a 13	10 a 13	13 e 14	11 a 14	13 e 14	15 a 18	15 a 18

Pesquisa e ação

Planejamento financeiro

Ter uma vida financeira saudável e equilibrada pode parecer simples, mas requer planejamento e cautela. E a receita para isso não é nada complicada: basta que os gastos da família sejam menores ou iguais à renda familiar. Mas, como saber se a renda familiar é suficiente para os gastos realizados ao longo de um mês?

Vamos elaborar uma planilha de planejamento financeiro para uma família. O controle financeiro se dá no equilíbrio entre o consumo (gastos essenciais fixos, gastos variáveis e gastos imprevistos) e a renda familiar.


DANIEL RODRIGUEZ/GETTY IMAGES

Procedimentos

1) Reúna-se com seus colegas em pequenos grupos e criem um perfil familiar. Para isso, vocês deverão considerar a quantidade de adultos que possuem renda, a quantidade de dependentes (crianças, adolescentes e adultos). Por exemplo, é possível considerar uma família composta de dois adultos que possuem renda e duas crianças, uma de 3 anos e outra de 5 anos.

KRISTIAN SEKULIC/GETTY IMAGES

2) Em seguida, devem considerar a renda mensal dessa família. A renda mensal de uma família é composta pelas rendas de todos os integrantes da família que recebem algum tipo de remuneração.

3) A próxima etapa é fazer um levantamento dos gastos dessa família. Nesta etapa, cada integrante do grupo deverá levantar os dados de sua própria casa (valores gastos com água, luz, telefone fixo, telefone celular, aluguel, condomínio, prestação da casa própria etc.), para depois comparar com os demais colegas e, juntos, construírem um gasto da família criada pelo grupo. Lembrem-se: existem gastos fixos e existem gastos ocasionais, como a compra de um eletrodoméstico, por exemplo.

DAVID SACKS/GETTY IMAGES

4) Após a coleta dos dados, o grupo deverá organizar, usando uma planilha eletrônica, as informações dos gastos da família em questão em uma tabela. Ao final, deverão avaliar se a renda estimada inicialmente é suficiente para sustentar os gastos dessa família, ao longo de um mês.

5) Com todos os dados organizados (renda e gastos), o grupo deverá apresentar um gráfico mostrando os gastos da família e avaliando o planejamento financeiro feito, expondo-os para o resto da turma.

MARK BOWDEN/GETTY IMAGES

6) Ao final, devem escrever uma recomendação para a saúde financeira dessa família inventada. Se a renda estiver de acordo com os gastos, devem elaborar uma mensagem de apoio. Caso contrário, devem orientar a família a economizar para ajudar no planejamento financeiro.

7) Você e os colegas de classe, junto com o professor, poderão organizar uma oficina sobre planejamento financeiro.

Resolução comentada

Porcentagens e juros

Problema

(UFRJ) O sr. Feliciano contraiu, em um banco, um empréstimo de R$ 10.000,00, com juros de 3% ao mês; ou seja, o saldo devedor é recalculado, a cada mês, acrescentando-se 3% ao antigo. Começou a pagar a dívida exatamente um mês após tê-la contraído. Pagou, religiosamente, R$ 250,00 por mês, durante 10 anos.

a) Calcule o saldo devedor após o primeiro pagamento.

b) Indique, das opções a seguir, a que representa a situação do sr. Feliciano decorridos os 10 anos.

I) A dívida foi quitada.
II) O sr. Feliciano deve ao banco menos de R$ 10.000,00.
III) O sr. Feliciano deve ao banco algo entre R$ 10.000,00 e R$ 16.000,00.
IV) O sr. Feliciano deve ao banco mais de R$ 16.000,00.
V) O banco deve dinheiro ao sr. Feliciano.

Resolução

O sr. Feliciano endividou-se e, quando pagou a 1ª prestação, sua dívida já tinha sido recalculada pelo banco.

a) Para calcular quanto será a dívida no final do 1º mês e após o pagamento da 1ª parcela, vamos utilizar a fórmula de juro composto.

Como a taxa de juro é 3% ao mês, temos: $i = \frac{3}{100} \Rightarrow i = 0,03$

A dívida (M_1) em real, após 1 mês ($t = 1$), sob a taxa 0,03 será:

$M_1 = C_0 \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M_1 = 10.000 \cdot (1 + 0,03)^1 \Rightarrow M_1 = 10.300$

A dívida, após o 1º pagamento, era de:

R$ 10.300,00 − R$ 250,00 = R$ 10.050,00. Ela aumentou!

Atenção!

Esta lei de função não traduz a situação do problema:

~~$D(t) = 10.000(1,03)^t = 250^t$~~

O primeiro termo da função indica o total que o sr. Feliciano deveria ao banco se não tivesse pago nada por *t* meses; já o segundo termo representa o valor total pago exatamente após *t* meses da data inicial da dívida.

Essa lei não considera que os juros devem ser calculados sobre a dívida mês a mês.

b) Vamos calcular o valor da dívida depois de cada pagamento mensal.

Podemos resolver este problema de duas maneiras diferentes. Uma delas é por meio de estimativa e a outra pela utilização de uma planilha eletrônica.

Resolvendo por meio de estimativa

Após o 1º pagamento, a dívida aumentou R$ 50,00 (10.050 − 10.000 = 50).

Calculando qual será a dívida após o 2º pagamento, temos:

$M_2 = 10.050 \cdot 1,03 \Rightarrow M_2 = 10.351,50$

R$ 10.351,50 − R$ 250,00 = R$ 10.101,50

Em relação ao valor da dívida após o 1º pagamento, houve um aumento de R$ 51,50:

R$ 10.101,50 − R$ 10.050 = R$ 51,50

É possível fazer as estimativas neste problema porque os itens se referem à faixa em que a dívida estará após 10 anos. Caso o enunciado tivesse pedido o valor exato da dívida, esse procedimento não seria viável.

Se continuarmos calculando a dívida, mês a mês, perceberemos que ela aumentará e, a cada mês, o aumento será de, no mínimo, R$ 50,00.

Para estimar quanto será a dívida após 10 anos, podemos calcular:

$$10.000 + 50 \cdot \underbrace{12}_{\text{12 meses em 1 ano}} \cdot \underbrace{10}_{\text{10 anos}} = 16.000$$

Ou seja, a dívida após 10 anos será, no mínimo, de R$ 16.000,00.

Analisando as alternativas do enunciado, vemos que o item **IV** é o verdadeiro.

Observem que, como a dívida sempre aumenta, o sr. Feliciano nunca conseguirá quitá-la pagando R$ 250,00 por mês.

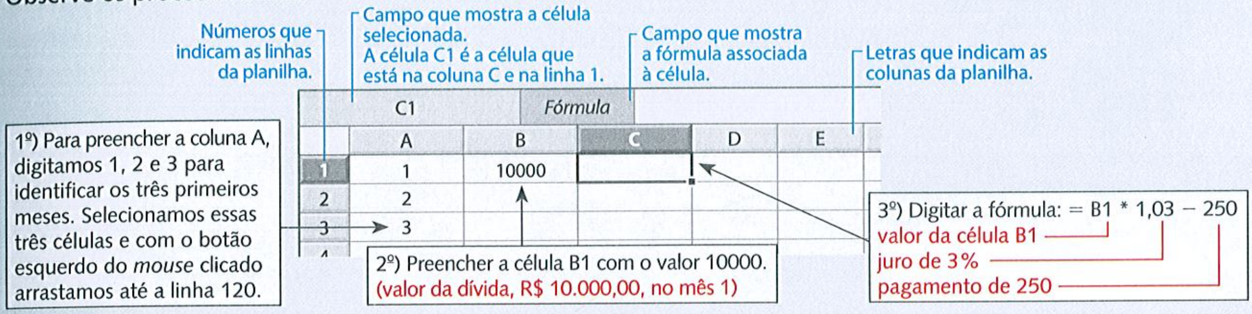
Resolvendo por meio de uma planilha eletrônica

Para calcular a dívida, podemos aplicar a fórmula de juro composto 120 vezes (10 · 12), o que seria muito trabalhoso. Para auxiliar nesses cálculos, podemos recorrer a uma planilha eletrônica, utilizando 3 colunas, A, B e C, da seguinte maneira:

- Na coluna A, indicaremos os 120 meses.
- Na coluna B, será indicado o valor da dívida referente ao mês da coluna A.
- Na coluna C, indicaremos o valor da dívida após a aplicação dos juros e o pagamento mensal de R$ 250,00.

Observe os procedimentos.

Como esta questão é de vestibular, a banca examinadora não pretendia que os candidatos resolvessem dessa forma, mas essa saída é interessante, pois contempla o uso do computador como ferramenta de uma possível resolução de problemas.

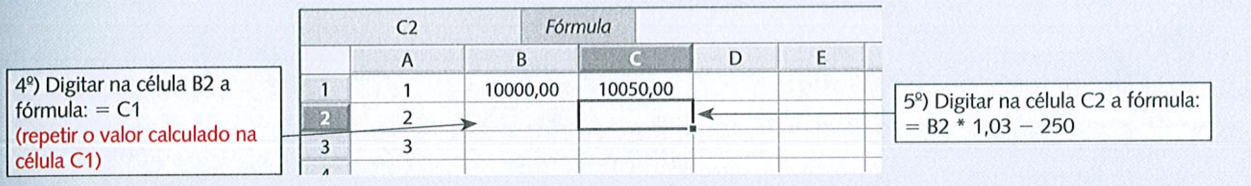

Números que indicam as linhas da planilha.
Campo que mostra a célula selecionada. A célula C1 é a célula que está na coluna C e na linha 1.
Campo que mostra a fórmula associada à célula.
Letras que indicam as colunas da planilha.

C1	Fórmula				
	A	B	C	D	E
1	1	10000			
2	2				
3	3				

1º) Para preencher a coluna A, digitamos 1, 2 e 3 para identificar os três primeiros meses. Selecionamos essas três células e com o botão esquerdo do *mouse* clicado arrastamos até a linha 120.

2º) Preencher a célula B1 com o valor 10000. (valor da dívida, R$ 10.000,00, no mês 1)

3º) Digitar a fórmula: = B1 * 1,03 − 250
valor da célula B1
juro de 3%
pagamento de 250

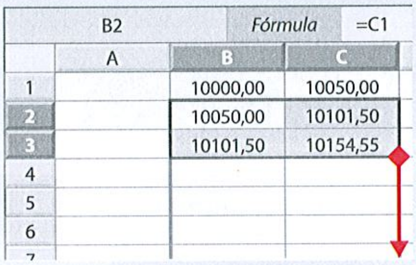


C2	Fórmula				
	A	B	C	D	E
1	1	10000,00	10050,00		
2	2				
3	3				

4º) Digitar na célula B2 a fórmula: = C1 (repetir o valor calculado na célula C1)

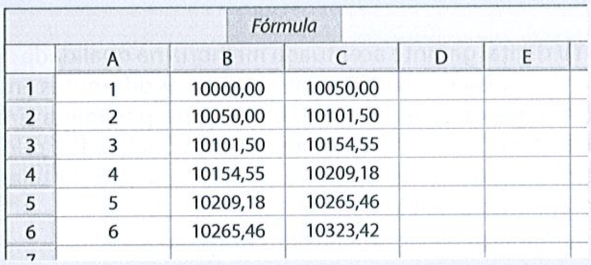
5º) Digitar na célula C2 a fórmula: = B2 * 1,03 − 250

Repetindo esse procedimento para as células B3 e C3, preenchemos os valores referente ao mês 3. Mas não é necessário repetir esses procedimentos até a linha 120, podemos selecionar as células B2, C2, B3 e C3, levar o cursor até a quina da seleção e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar até a linha 120. Esse procedimento copia as fórmulas para todos os campos marcados.



B2	Fórmula	=C1
	A	B	C
1		10000,00	10050,00
2		10050,00	10101,50
3		10101,50	10154,55
4			
5			
6			

Vejam como ficará a planilha parcialmente preenchida:



	Fórmula				
	A	B	C	D	E
1	1	10000,00	10050,00		
2	2	10050,00	10101,50		
3	3	10101,50	10154,55		
4	4	10154,55	10209,18		
5	5	10209,18	10265,46		
6	6	10265,46	10323,42		

Façam essa planilha em um computador e verifiquem qual será a dívida após 10 anos. R$ 66.184,98

Se achar conveniente, é possível pedir aos alunos que construam o gráfico com os dados dessa tabela.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Comparem as resoluções

Escolham uma das resoluções e escrevam no caderno um comentário sobre ela.

Se vocês pensaram em uma forma diferente de resolver esse problema, elaborem a resolução no caderno e façam um comentário a respeito. resposta pessoal

Variações do problema

1. Caso o sr. Feliciano tivesse tomado emprestados do banco R$ 50.000,00 e pagasse R$ 400,00 a.m., iniciando seus pagamentos ao final do 1º mês decorrente da data de empréstimo e adotando uma taxa de juros de 4% ao mês, qual seria o valor da dívida após 2 meses? O sr. Feliciano chegaria, algum dia, a quitar sua dívida? Após 2 meses sua dívida seria R$ 53.264,00. Não.
E se o sr. Feliciano pagasse R$ 2.000,00 mensalmente, o que aconteceria? Sua dívida permaneceria R$ 50.000,00.
2. Caso fosse feito outro empréstimo no valor de R$ 50.000,00 e com taxa de juros de 3% ao mês, mas agora pagando R$ 2.000,00 ao mês, qual seria o valor da dívida ao final do 1º mês (considerando o pagamento da primeira parcela)? A dívida seria quitada um dia? R$ 49.500,00; sim

Capítulo 2

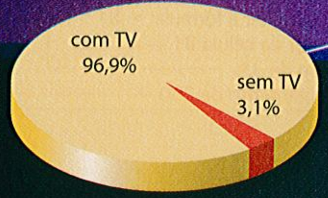
Análise de dados

PAULO MANZI

Aparelho de TV

Os aparelhos de TV convencionais atendem ao padrão de imagem (proporção entre largura e altura) de 4 : 3, o que obriga a uma adaptação "forçada" dos filmes produzidos para cinema, que, desde a década de 1950, adotam o padrão *widescreen*, cuja proporção é 16 : 9. Nessa "adaptação", ou se excluem as laterais do filme, apresentando apenas o centro da imagem, ou se utilizam os *letterboxes*, aquelas faixas pretas na parte superior e inferior da tela. A TV digital, além de adotar telas em *widescreen*, possibilita alta resolução de imagem (HDTV), com 1.080 linhas, contra as 480 linhas das TVs tradicionais.

Distribuição dos domicílios brasileiros segundo a existência de TV



ADILSON SECCO

Dados obtidos em: IBGE. *PNAD (Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios) 2011*. v. 31. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. Disponível em: www.ibge.gov.br Acesso em: 4 dez. 2012.

Objetivos do capítulo

- Reconhecer as variáveis utilizadas em uma pesquisa.
- Organizar dados e construir tabelas com distribuições de frequências.
- Interpretar dados apresentados por meio de gráficos diversos.
- Construir gráficos.
- Interpretar e construir histogramas e polígonos de frequências.

1 Noções de Estatística

A tecnologia da TV digital garante acentuada melhoria na qualidade da imagem e do som, permite a transmissão simultânea de programas diferentes em um único sinal e a participação ativa do telespectador. Além disso, possibilita sintonizar as emissoras em aparelhos celulares e em automóveis. Essas qualidades, principalmente a interatividade, estimulam a mudança de comportamento do telespectador, até então quase totalmente passivo.

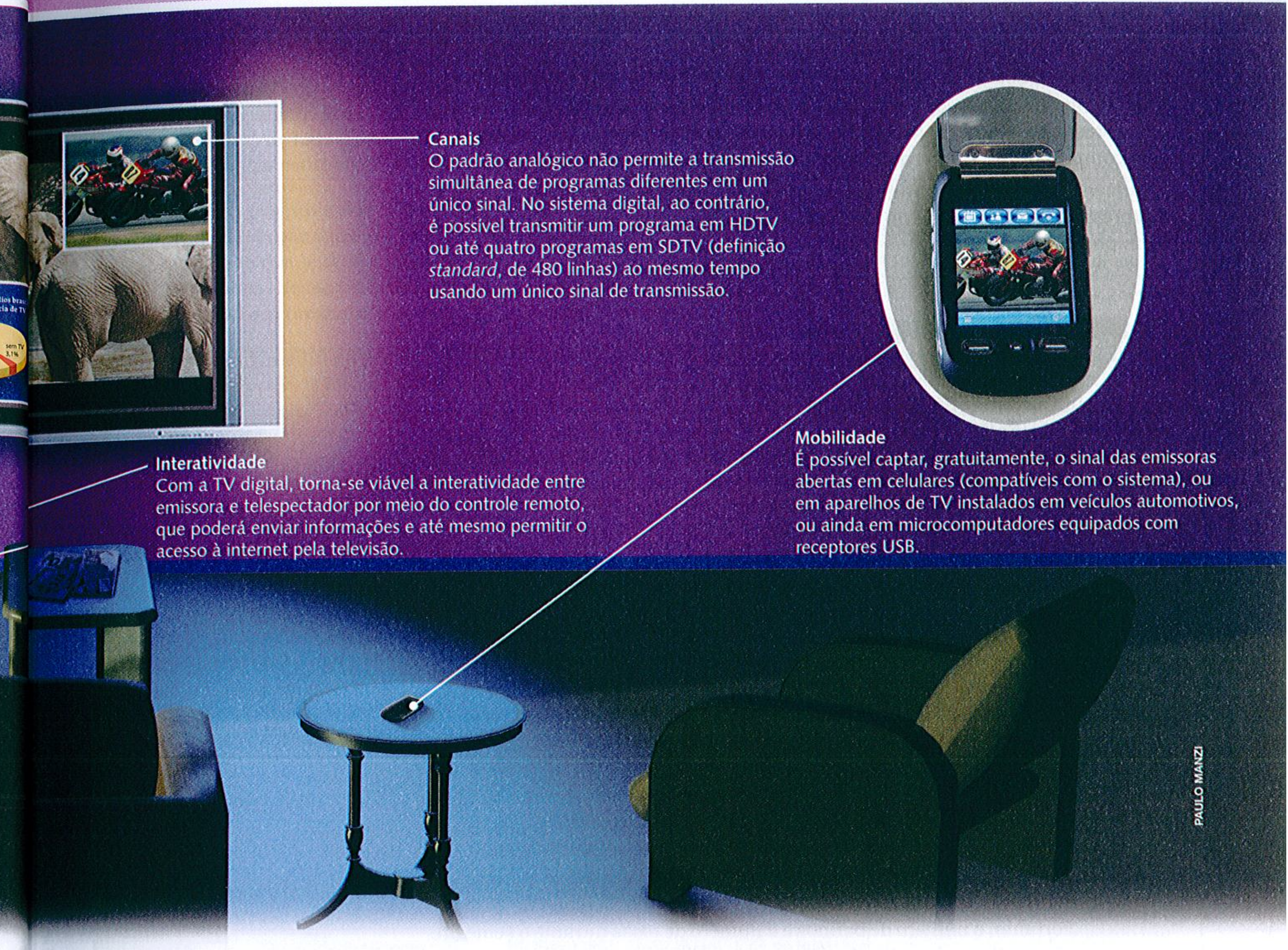
Essa tecnologia poderá ser alcançada por quantas pessoas?

Segundo a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD), em 2011, 96,9% dos domicílios brasileiros tinham acesso à televisão. Com o tempo, esse grande número de pessoas terá acesso à TV digital. A indústria de televisores migrará da produção analógica para a digital.

Na pesquisa realizada pela PNAD, os domicílios brasileiros (61,3 milhões de domicílios em 2011) formam uma população, e os domicílios pesquisados formam uma amostra dessa população. Nesse caso, a amostra é constituída pelos domicílios entrevistados.

Uma **população** é um conjunto de elementos que têm pelo menos uma característica em comum.

Uma **amostra** é um subconjunto finito formado por elementos extraídos de uma população.



Canais
O padrão analógico não permite a transmissão simultânea de programas diferentes em um único sinal. No sistema digital, ao contrário, é possível transmitir um programa em HDTV ou até quatro programas em SDTV (definição *standard*, de 480 linhas) ao mesmo tempo usando um único sinal de transmissão.

Interatividade
Com a TV digital, torna-se viável a interatividade entre emissora e telespectador por meio do controle remoto, que poderá enviar informações e até mesmo permitir o acesso à internet pela televisão.

Mobilidade
É possível captar, gratuitamente, o sinal das emissoras abertas em celulares (compatíveis com o sistema), ou em aparelhos de TV instalados em veículos automotivos, ou ainda em microcomputadores equipados com receptores USB.

PAULO MANZI

Variável

Na compra de um aparelho de TV, além da marca, podemos escolher as dimensões da tela, os recursos disponíveis, bem como o preço. Cada uma dessas características — marca, dimensões da tela, recursos disponíveis e preço — é chamada de **variável**.

> **Variável** é uma característica ou um atributo estudado em todos os elementos da população.

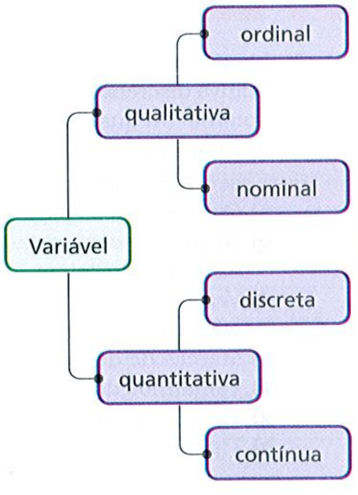
As variáveis podem ser classificadas em **qualitativas** ou em **quantitativas**.

- **Variável qualitativa:** seus valores são expressos por atributos (qualidade do elemento pesquisado). Por exemplo, no caso de indivíduos: cor dos olhos, grau de escolaridade, time preferido, classe social.

  Uma variável qualitativa pode ser **ordinal** ou **nominal**.

  Variável qualitativa ordinal: quando seus valores podem ser ordenados. Por exemplo: grau de escolaridade, classe social, classificação do grau de dificuldade das questões de uma prova em fácil, médio ou difícil.

  Variável qualitativa nominal: quando seus valores não podem ser ordenados. Por exemplo: cor dos olhos, sexo, time preferido.



ADILSON SECCO

- **Variável quantitativa:** seus valores são expressos por números. Por exemplo: altura, massa, idade, número de irmãos.

Quando a variável é quantitativa, podemos classificá-la como **discreta** ou **contínua**.

Variável quantitativa discreta: quando é proveniente de contagem, ou seja, é expressa por número inteiro. Por exemplo: número de irmãos, quantidade de computadores, número de animais.

Variável quantitativa contínua: quando é proveniente de medida, ou seja, é expressa por número real (inteiro ou não). Por exemplo: massa, idade, altura, temperatura, volume.

Exercício resolvido

R1. Em um *pet shop* há 300 animais cadastrados. Para melhor atendê-los, foi feita uma pesquisa sobre o porte, a raça e a idade dos animais. Também foram verificados o número de banhos e de tosas durante o semestre e o tempo em que esses animais ficam hospedados em hotéis. Para isso, foram selecionados de modo aleatório (ao acaso) 160 animais.

a) Determinar a população e a amostra dessa pesquisa.

b) Identificar as variáveis qualitativas estudadas na pesquisa.

c) Identificar e classificar as variáveis quantitativas estudadas na pesquisa.

FOTOEDU/SHUTTERSTOCK

O banho e a tosa são medidas profiláticas principalmente quando o animal compartilha do ambiente interno às residências.

▸ ***Resolução***

a) Como no cadastro do *pet shop* há 300 animais, a população é formada por esses 300 animais.

Note que foram observados 160 animais; logo, a amostra pesquisada é formada por esses 160 animais.

b) As variáveis qualitativas não são expressas por números.

Portanto, o porte e a raça dos cães são variáveis qualitativas.

c) As variáveis quantitativas discretas são provenientes de contagem e expressas por números inteiros.

Portanto, o número de banhos e o número de tosas durante o semestre são variáveis quantitativas discretas.

As variáveis quantitativas contínuas são provenientes de medidas e expressas por números reais (inteiros ou não).

Portanto, a idade e o tempo em que ficam hospedados em hotéis são variáveis quantitativas contínuas.

2. As variáveis qualitativas observadas: modalidade(s) esportiva(s) e período(s) mais utilizado(s) em exercícios físicos. A variável quantitativa contínua observada: massa muscular (expressa por um número real).

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Identifique as variáveis e classifique-as em quantitativa discreta, quantitativa contínua, qualitativa nominal ou qualitativa ordinal. Ver resolução no Guia do professor.

a) Classificação das colunas de um jornal, por seu editor, como excelente, boa ou ruim.

b) Os números de páginas de uma lista telefônica.

c) Grau de escolaridade dos governantes dos estados brasileiros.

d) Vendas anuais de uma empresa do setor de telefonia celular.

e) Marcas de desodorante.

f) Tamanhos de roupa expressos em P, M e G.

g) Tipos de queijo vendidos em um supermercado.

h) Tipos de loja da cidade de Ilhéus na Bahia.

i) Número de livros da biblioteca de uma escola.

j) Preços de motos.

k) Esferas de governo (federal, estadual e municipal).

2. Uma academia de ginástica tem 5.000 alunos. Seus proprietários resolveram realizar uma pesquisa com 500 de seus alunos para identificar a(s) modalidade(s) esportiva(s) preferida(s), o(s) período(s) (manhã, tarde e noite) mais utilizado(s) em exercícios físicos e a massa muscular (em kg) adquirida pelos alunos após um ano de exercícios. Nesse caso, quais são as variáveis observadas? Entre as variáveis estudadas, quais são qualitativas, quantitativas contínuas e quantitativas discretas?

3. Para saber o grau de satisfação dos habitantes de Porto Alegre em relação ao governo, foram entrevistadas 8.500 pessoas. Sabendo que, na época da pesquisa, a cidade de Porto Alegre tinha cerca de 1,4 milhão de habitantes, identifique a população e a amostra estudadas. População: 1,4 milhão de habitantes de Porto Alegre. Amostra: 8.500 pessoas entrevistadas.

4. Em uma pesquisa sobre os 50 sabores de sorvete produzidos por uma sorveteria, para verificar a qualidade dos sorvetes vendidos, foram testados 10 sabores. Nessa pesquisa, que porcentagem da população representa a amostra pesquisada? 20%

5. Observe o quadro de cadastro de funcionários da microempresa WWW:

Quadro de funcionários				
Nome	**Sexo**	**Salário (R$)**	**Grau de escolaridade**	**Tempo de serviço**
Keila	F	1.350	ensino médio	2 anos
Carla	F	1.000	ensino médio	3,5 anos
Marco	M	2.500	universitário	2 anos
Alex	M	2.000	universitário	5 anos
Bia	F	3.100	especialização	8 anos

Fonte: Microempresa WWW.

- Identifique as variáveis qualitativas (ordinal ou nominal) e as variáveis quantitativas (contínuas ou discretas).

5. Variáveis qualitativas nominais: nome e sexo.
Variável qualitativa ordinal: grau de escolaridade.
Variáveis quantitativas contínuas: salário e tempo de serviço.

2 Distribuição de frequências

2.1 Frequência absoluta, frequência relativa e frequências acumuladas

Numa pesquisa sobre preços (em reais) de um modelo de *tablet*, em 20 lojas do ramo, foram coletados os valores a seguir.

1.000 1.500 1.000 1.600 1.000 1.600 1.600 1.500 1.500 1.000
1.000 1.000 1.500 1.600 1.600 1.600 1.600 1.600 1.600 1.600

DRAGON IMAGES/SHUTTERSTOCK

Apenas conhecer os preços do modelo de *tablet* pesquisado não ajuda a analisar o comportamento da variável preço. Podemos elaborar uma tabela de frequências para inferir, com mais precisão, esse comportamento.

Para analisar a variável preço, agrupamos seus valores em uma tabela:

Preço (R$)	Quantidade de lojas
1.000	//////
1.500	////
1.600	//////////
Total	////////////////////

ou

Preço (R$)	Quantidade de lojas
1.000	6
1.500	4
1.600	10
Total	20

Na tabela da direita, os números que aparecem na coluna "quantidade de lojas" indicam as frequências dos valores observados da variável estudada (preço).

A quantidade de vezes que cada valor é observado chama-se **frequência absoluta** ou, simplesmente, **frequência (f_i)**.

A tabela que mostra a relação entre a variável e a quantidade de vezes que cada valor se repete (frequência) é chamada de **tabela de frequências** ou **distribuição de frequências**.

Agora vamos acrescentar à tabela de frequências uma coluna com valores que indiquem a razão entre cada frequência absoluta e o total pesquisado. Os valores calculados recebem o nome de **frequência relativa (f_r)** e geralmente são expressos em porcentagem, para facilitar a interpretação dos dados.

Preço (R$)	Frequência absoluta f_i	Frequência relativa f_r
1.000	6	$\frac{6}{20} = 0{,}30$ ou 30%
1.500	4	$\frac{4}{20} = 0{,}20$ ou 20%
1.600	10	$\frac{10}{20} = 0{,}50$ ou 50%
Total	20	100%

Reflita

É possível encontrar uma frequência relativa negativa ou maior que 100%?

Não, pois a frequência relativa é a razão entre uma parte e o todo, sendo, portanto, sempre um número de 0 a 1 ou de 0% e 100%.

Para saber mais sobre a variável estudada, podemos calcular a soma de cada frequência absoluta com as frequências absolutas anteriores, que chamamos de **frequência absoluta acumulada (F_i)**, e a soma de cada frequência relativa com as frequências relativas anteriores, que chamamos de **frequência relativa acumulada (F_r)**.

Preço (R$)	Frequência absoluta f_i	Frequência relativa f_r	Frequência absoluta acumulada F_i	Frequência relativa acumulada F_r
1.000	6	30%	6	30%
1.500	4	20%	10 = 6 + 4	50% = 30% + 20%
1.600	10	50%	20 = 6 + 4 + 10	100% = 30% + 20% + 50%
Total	20	100%	—	—

Observação

Na situação ao lado, se quisermos saber a porcentagem de *tablets* que custam até R$ 1.500,00, basta encontrarmos, na coluna frequência relativa acumulada, a porcentagem relativa ao valor R$ 1.500,00.

As frequências acumuladas são úteis quando o objetivo é saber a quantidade ou a porcentagem até determinada característica.

Exercício resolvido

R2. Estas são as notas de Matemática de 20 alunos da classe de Ana:

7,0	5,0	9,0	5,0	8,0
6,0	6,0	7,0	7,0	7,0
5,0	8,0	9,0	10,0	8,0
5,0	5,0	5,0	6,0	6,0

Usando uma planilha eletrônica, construir uma tabela de distribuição de frequências com frequência absoluta, frequência relativa e frequências acumuladas. Com base na tabela, responder:

a) Quantos alunos obtiveram nota 6,0, que é a nota mínima de aprovação?

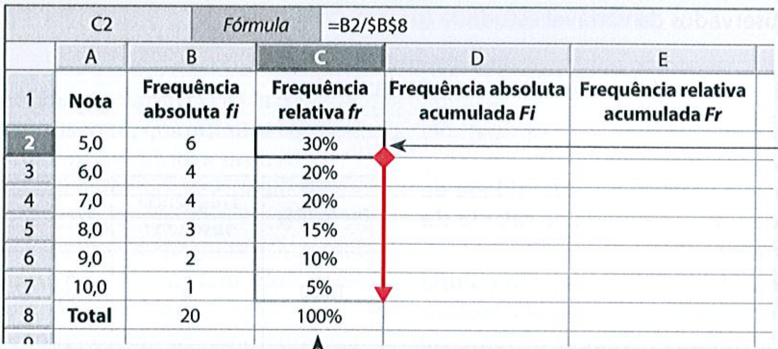
b) Quantos alunos obtiveram nota menor ou igual a 7,0?

c) Que porcentagem de alunos obtiveram nota menor que 8,0?

d) Qual foi a porcentagem de alunos reprovados em Matemática?

▸ ***Resolução***

Para construir a tabela de distribuição de frequências em uma planilha eletrônica, inicialmente preenchemos uma coluna com as notas e uma com as respectivas frequências absolutas, de acordo com os dados apresentados.



C2 | *Fórmula* | =B2/$B$8

	A	B	C	D	E
1	Nota	Frequência absoluta *fi*	Frequência relativa *fr*	Frequência absoluta acumulada *Fi*	Frequência relativa acumulada *Fr*
2	5,0	6	30%		
3	6,0	4	20%		
4	7,0	4	20%		
5	8,0	3	15%		
6	9,0	2	10%		
7	10,0	1	5%		
8	Total	20	100%		
9					

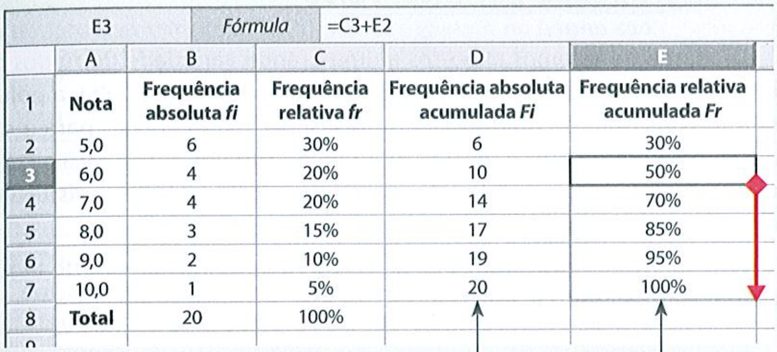
ADILSON SECCO

Digitamos, na célula C2, a fórmula:
=B2/$B$8
(Calcula a razão entre os valores das células B2 e B8.)
O $ é empregado na fórmula para fixar a coluna B e a linha 8. Assim, quando a fórmula da célula C2 for copiada para outras células, a célula B8 ficará fixa na fórmula. A seguir, formatamos a célula para mostrar o valor em porcentagem.

Para preencher os outros valores da coluna de frequências relativas, selecionamos a célula C2 e arrastamos a seleção até a célula C7. Copiamos, dessa forma, a fórmula para as células C3 a C7, substituindo B2, respectivamente, por B3, B4, B5, B6 e B7.

Na célula C8 digitamos a fórmula:
=SOMA(C2:C7)
(Calcula a soma dos valores das células C2 a C7.)

Preenchemos, agora, as colunas das frequências acumuladas.



E3 | *Fórmula* | =C3+E2

	A	B	C	D	E
1	**Nota**	**Frequência absoluta *fi***	**Frequência relativa *fr***	**Frequência absoluta acumulada *Fi***	**Frequência relativa acumulada *Fr***
2	5,0	6	30%	6	30%
3	6,0	4	20%	10	50%
4	7,0	4	20%	14	70%
5	8,0	3	15%	17	85%
6	9,0	2	10%	19	95%
7	10,0	1	5%	20	100%
8	**Total**	20	100%		

ADILSON SECCO

Digitamos, na célula D2, a fórmula:
=B2
(Copia o valor da célula B2.)
Na célula D3, digitamos:
=B3+D2
(Adiciona o valor da célula B3 com o valor de D2.)
Selecionamos a célula D3 e arrastamos a seleção até a célula D7. Dessa forma, cada célula terá o valor da célula anterior adicionado com o valor correspondente na coluna B. Preenchemos, assim, a coluna das frequências absolutas acumuladas.

Digitamos, na célula E2, a fórmula:
=C2
(Copia o valor da célula C2.)
Na célula E3, digitamos:
=C3+E2
(Adiciona o valor da célula C3 com o valor de E2.)
Selecionamos a célula E3 e arrastamos a seleção até a célula E7. Dessa forma, cada célula terá o valor da célula anterior adicionado com o valor correspondente na coluna C. Preenchemos, assim, a coluna das frequências relativas acumuladas.

Agora, analisando a tabela, vamos responder às questões:

a) 4 alunos, que é a frequência absoluta até a nota 6,0.

b) 14 alunos, que é a frequência absoluta acumulada até a nota 7,0.

c) 70% dos alunos, que é a frequência relativa acumulada até a nota 7,0.

d) 30% dos alunos, que é a frequência relativa acumulada até a nota 5,0.

Se for possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

6. Os conceitos dos alunos de uma turma de um curso de pós-graduação em Administração de empresas foram os seguintes:

C A B C A B C
A E D C A C E
B B D E C D B
C E C B D E C
C B B C A C A

Ver resolução no Guia do professor.

a) Construa uma tabela com todas as frequências.

b) Quantos alunos obtiveram conceito A? 6 alunos

c) Sabendo que os conceitos de aprovação são A, B ou C, quantos alunos estão reprovados? 9 alunos

d) Qual é a porcentagem de alunos que obtiveram conceito C? ≃ 34,3%

e) Qual é a porcentagem de alunos que obtiveram conceitos D ou E? ≃ 25,7%

f) Qual é a porcentagem de alunos que obtiveram conceitos A ou B? 40%

7. Observe as distâncias diárias percorridas (em quilômetro) pelos taxistas de uma empresa:

90	87	356	70	49	320
320	250	200	236	274	305
360	480	400	150	426	460
278	260	320	346	358	332
357	410	298	314	440	110

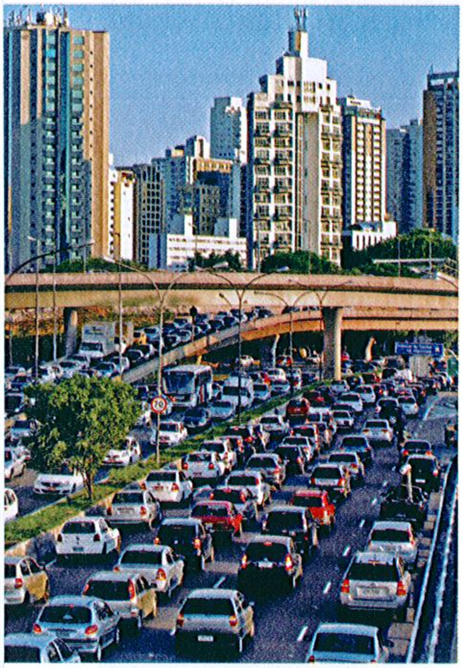
Os dados podem ser agrupados por meio de intervalos. Copie e complete a tabela com a frequência correspondente.

MODELO

Distância (km)	Frequência absoluta (f_i)
[0, 100[	4
[100, 200[	2
[200, 300[	7
[300, 400[	11
[400, 500[	6

- Como esse procedimento facilita o estudo da variável? Quando temos de analisar uma quantidade muito grande de dados, agrupá-los em intervalos convenientes permite uma análise mais imediata da distribuição de frequência da variável.

2.2 Distribuição de frequências para dados agrupados por intervalos



JUCA MARTINS/OLHAR IMAGEM

Grande parte do ruído na cidade de São Paulo provém de seu intenso trânsito. O limite de ruído diurno aconselhado pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) em áreas residenciais e comerciais é de 65 dB. O nível de ruído de um tráfego pesado está acima de 70 dB. (Trânsito na Avenida 23 de Maio, São Paulo, 2011.)

Diariamente estamos expostos a uma grande variedade de ruídos de diversas intensidades. Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS), a poluição sonora é um dos tipos de poluição mais graves, perdendo apenas para a da água e a do ar. Seus efeitos sobre os humanos vão da simples perturbação até alterações da saúde, como a perda parcial ou total da audição, estresse, distúrbios do sono e problemas cardíacos.

A seguir, estão registrados os níveis de ruído (em decibéis) de algumas áreas residenciais de uma cidade.

73,94	71,52	66,84	64,17	66,16	65,70	64,78	65,81
63,14	62,57	61,89	60,96	60,32	60,14	56,67	55,89
71,46	70,08	64,43	63,29	66,01	65,08	64,71	64,15
62,69	61,92	61,49	60,74	60,22	59,36	56,03	55,77

Como temos muitos dados distintos, uma distribuição de frequências como as anteriores pouco facilitaria a organização desses dados. Nesse caso, podemos agrupar os valores em um número de intervalos (ou **classes**).

Uma vez que o maior valor coletado é 73,94 e o menor é 55,77, calculando a diferença entre eles, obtemos a **amplitude total** de 18,17 decibéis.

Para construir a tabela, podemos dividir a amplitude total, por exemplo, por 4. A **amplitude do intervalo** (ou da classe) é, se for número inteiro, o quociente obtido. Quando o resultado não for inteiro, devemos arredondá-lo para o menor inteiro maior que o quociente.

A escolha do número de classes dependerá da natureza dos dados.

Na situação acima, a distribuição dos valores em quatro classes possibilitará uma análise adequada. Veja:

$$18{,}17 : 4 = 4{,}5425$$

Arredondando 4,5425 para 5, podemos agrupar os valores em classes de amplitude de 5 decibéis. Assim, o primeiro intervalo começaria em 55 decibéis, indo até 60 decibéis (55 + 5).

Para representar esse intervalo, podemos usar duas notações: **$55 \vdash 60$** ou **[55, 60[**, que indicam intervalos fechados à esquerda e abertos à direita.

Assim, $55 \vdash 60$ significa que são medidas entre 55 e 60 decibéis, com o extremo inferior 55 pertencendo ao intervalo, e o extremo superior 60 não pertencendo.

Ruído (decibéis)	f_i	F_i	f_r	F_r
$55 \vdash 60$	5	5	15,625%	15,625%
$60 \vdash 65$	17	22	53,125%	68,75%
$65 \vdash 70$	6	28	18,75%	87,5%
$70 \vdash 75$	4	32	12,5%	100%
Total	32	—	100%	—

Com base nos dados da tabela, podemos concluir, por exemplo, que:

- 4 áreas residenciais da cidade apresentam nível de ruído entre 70 e 75 decibéis — esse nível de ruído equivale ao ruído de um tráfego pesado;
- 18,75% das áreas estudadas apresentam ruído entre 65 e 70 decibéis;
- 68,75% das áreas estudadas apresentam ruído menor que 65 decibéis.

Se achar adequado, essa atividade permite um trabalho interdisciplinar com Biologia.

Explore

Reúnam-se em grupos de quatro alunos e pesquisem mais sobre a poluição sonora e os danos causados à saúde. Vejam qual é o nível de ruído, em decibel, em ambientes como escritórios, escolas, avenidas, obras da construção civil, *shows* musicais, eventos esportivos etc. Elaborem cartazes utilizando fotos, gráficos e tabelas, expondo resultados e modos de prevenção e redução da poluição sonora. Depois, façam uma exposição na escola.

Reflita

Observando a tabela ao lado, quantas são as áreas que apresentam ruído até o limite recomendado pela ABNT? 22 áreas

Reflita

Se escolhêssemos uma amplitude maior para os intervalos, teríamos uma desvantagem. Qual?

Quanto maior a amplitude, menor a quantidade de intervalos, o que implica comprometimento da análise dos dados por perda de informações.

Exercício resolvido

R3. Os tempos (em minuto) que 30 pessoas gastam no banho são:

5 15 14 5 10 12 10 6 3 2 8 8 8 5 10
12 13 15 12 5 7 14 5 6 4 3 5 9 12 14

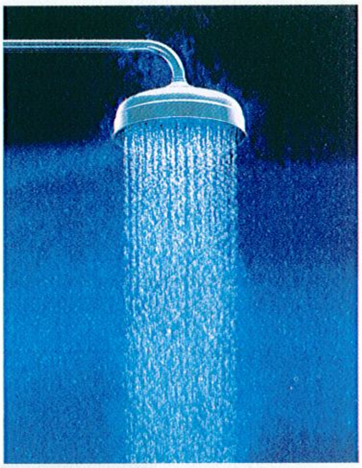
Construir uma distribuição de frequências com cinco intervalos e resolver os itens a seguir.

a) Determinar a porcentagem de pessoas que gastam 5 minutos ou mais no banho.

b) Considerando que a cada minuto de banho gastam-se aproximadamente 9 litros de água e que as pessoas entrevistadas tomam apenas um banho por dia, quantos litros de água essas pessoas gastam em um dia?

c) Se todas as pessoas entrevistadas passassem a tomar banhos de 5 minutos, quantos litros de água seriam economizados por dia?

d) Quantas pessoas, aproximadamente, poderiam ser abastecidas com a água economizada, sabendo que uma pessoa precisa de 110 litros de água por dia?


TONY BEE/PHOTOLIBRARY/GETTY IMAGES

Segundo a Organização das Nações Unidas (ONU), cada pessoa necessita de 110 litros de água por dia. Se uma pessoa tomar banho de ducha por 15 minutos, já gastará por volta de 135 litros de água. Um banho de 5 minutos é o suficiente para higienizar.

Se for possível e conveniente, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir que, em casa, reproduzam os procedimentos, para a elaboração da tabela, em uma planilha eletrônica.

▶ ***Resolução***

Para facilitar, vamos usar amplitude de classe igual a 3 minutos (13 : 5 = 2,6).

Tempo (min)	f_i	F_i	f_r	F_r
$2 \vdash 5$	4	4	13,3%	13,3%
$5 \vdash 8$	9	13	30,0%	43,3%
$8 \vdash 11$	7	20	23,3%	66,6%
$11 \vdash 14$	5	25	16,7%	83,3%
$14 \vdash 17$	5	30	16,7%	100%

a) A porcentagem dos que gastam 5 minutos ou mais no banho é 86,7% (100% − 13,3%).

b) Para determinar o total de litros de água gastos, inicialmente devemos somar todos os tempos registrados:

$5 + 15 + 14 + 5 + 10 + 12 + 10 + 6 + 3 + 2 + 8 + 8 + 8 + 5 + 10 + 12 + 13 + 15 + 12 + 5 + 7 + 14 + 5 + 6 + 4 + 3 + 5 + 9 + 12 + 14 = 257$

Em seguida, multiplicamos o tempo total em minuto por 9 litros:

$257 \cdot 9 = 2.313$

Assim, os entrevistados, juntos, consomem 2.313 litros de água com banho em um dia.

c) Se todas as pessoas levassem apenas 5 minutos no banho, teríamos um tempo total de:

$30 \cdot 5 = 150$

Multiplicando esse tempo por 9 litros:

$150 \cdot 9 = 1.350$

Em seguida, calculamos a diferença entre os valores:

$2.313 - 1.350 = 963$

Logo, por dia seriam economizados 963 litros.

d) Dividindo os 963 litros por 110, temos:

$963 : 110 \simeq 8,75$

Portanto, com 963 litros de água seria possível abastecer, por dia, aproximadamente 8 pessoas.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

11. a) 33, 33, 35, 35, 36, 38, 38, 40, 40, 41, 42, 42, 43, 43, 45, 48, 51, 53, 55, 56, 57, 61, 62, 62, 67, 69, 70, 72, 73, 73, 78, 80, 81, 84, 84, 85, 86, 87, 90, 92, 93, 96, 97, 103, 105, 108, 111, 111

8. Observe o valor das diárias dos quartos do Hotel Luxo:

Valor da diária no Hotel Luxo	
Diária (R$)	**Número de quartos**
[100, 130[	73
[130, 160[	48
[160, 190[	40
[190, 220[	24
[220, 250[	15
Total	200

Fonte: Hotel Luxo.

Copie a tabela completando-a com as frequências: absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada.

a) Qual é o extremo inferior da 1ª classe? R$ 100,00

b) Que intervalo apresenta os valores de diárias mais comuns? de R$ 100,00 a R$ 130,00

c) Qual é a porcentagem de quartos cujas diárias são inferiores a R$ 160,00? 60,5%

d) Quantos quartos correspondem a diárias inferiores a R$ 190,00? 161 quartos

e) Quantos quartos correspondem a diárias a partir de R$ 190,00? 39 quartos

9. Veja as contribuições fiscais (em real) de 40 pessoas sorteadas ao acaso, durante um ano.

200	150	780	2.132	1.976
208	624	2.236	4.404	5.132
832	676	3.172	3.208	2.132
988	3.926	1.196	2.132	3.728
728	2.948	1.248	2.704	5.928
988	1.710	1.716	1.404	4.108
468	2.392	2.028	4.472	3.174
624	3.959	4.040	1.092	1.040

a) Organize os dados em ordem crescente. Ver resolução no Guia do professor.

b) Agrupe os dados numa distribuição de frequências com intervalos. Use uma amplitude conveniente.

c) Qual é o intervalo de contribuições fiscais mais comum? Resposta possível: de R$ 150,00 a R$ 1.050,00

10. Um grupo de 50 analistas financeiros efetuou uma previsão, por ganho de ações, em real, de uma empresa no próximo ano. Os resultados obtidos estão apresentados na distribuição de frequências abaixo.

MODELO

Ganho por ação (R$)	Número de analistas (f_i)	F_i	f_r	F_r
		4		8%
		8		
[8, 10[			22%	
[10, 12[	8	27		
		37		74%
			16%	
	5			100%

- Copie a tabela de frequências em seu caderno e complete-a. Ver resolução no Guia do professor.

11. A exposição continuada a altos níveis de ruído pode causar a PAIR: perda auditiva induzida por ruído. Por esse motivo, o Ministério do Trabalho recomenda a exposição máxima diária de 8 horas ao nível de 85 decibéis. Uma grande indústria metalúrgica realizou uma pesquisa para avaliar o nível de ruído em diferentes setores de suas instalações, obtendo os seguintes dados, em decibéis:

45	85	80	42	72	53	111	108
105	86	33	38	40	55	67	62
61	78	70	41	38	35	40	42
111	103	92	90	96	35	51	69
73	33	84	56	57	48	43	43
73	81	87	93	97	62	84	36

Você pode resolver os itens a seguir com um colega.

a) Organizem os dados em ordem crescente.

b) Agrupem os dados numa distribuição de frequências com intervalos e, se possível em uma planilha eletrônica, elaborem uma tabela com as frequências absoluta, absoluta acumulada relativa e relativa acumulada. Use uma amplitude conveniente. Ver resolução no Guia do professor.

c) Quantos setores apresentam nível de ruído de acordo com o limite recomendado pelo Ministério do Trabalho? 36 setores

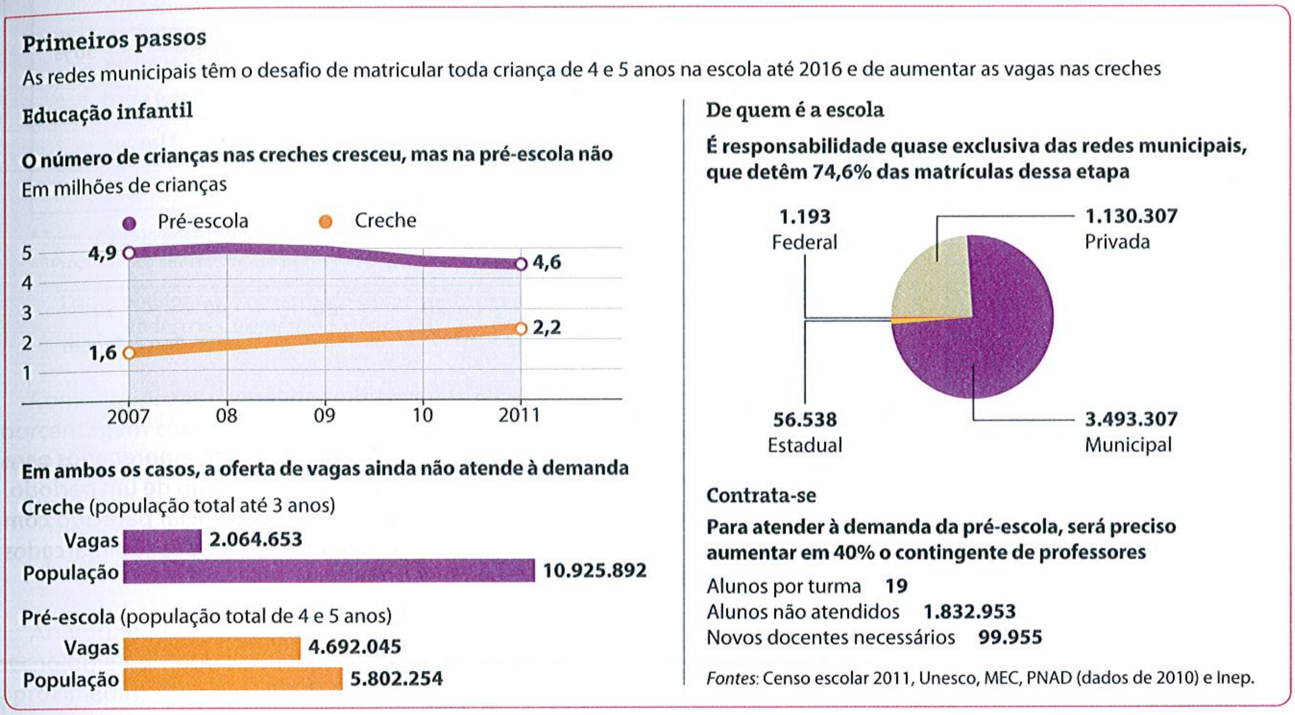
d) Em sua opinião, que outros problemas os altos níveis de ruído podem acarretar à saúde das pessoas? Resposta pessoal.

9. b) Ver resolução no Guia do professor. É importante salientar que a escolha da amplitude da classe depende de bom senso. Se os intervalos forem muito pequenos, haverá um número muito grande deles, e isso poderá significar que os dados não foram resumidos. Se forem muito grandes, poderá significar que houve excessiva perda de informações.

3 Representações gráficas

Com frequência os resultados numéricos referentes a uma reportagem ou a uma pesquisa são apresentados em jornais ou revistas por meio de gráficos, como os dados apresentados no quadro abaixo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO



Primeiros passos

As redes municipais têm o desafio de matricular toda criança de 4 e 5 anos na escola até 2016 e de aumentar as vagas nas creches

Educação infantil

O número de crianças nas creches cresceu, mas na pré-escola não

Em milhões de crianças

Em ambos os casos, a oferta de vagas ainda não atende à demanda

Creche (população total até 3 anos)

Pré-escola (população total de 4 e 5 anos)

De quem é a escola

É responsabilidade quase exclusiva das redes municipais, que detêm 74,6% das matrículas dessa etapa

Contrata-se

Para atender à demanda da pré-escola, será preciso aumentar em 40% o contingente de professores

Alunos por turma	**19**
Alunos não atendidos	**1.832.953**
Novos docentes necessários	**99.955**

Fontes: Censo escolar 2011, Unesco, MEC, PNAD (dados de 2010) e Inep.

Disponível em: Um ano para a Educação Infantil. *Época*, São Paulo: Globo, n. 763, 31 dez. 2012.

Quando empregados corretamente, os gráficos podem evidenciar, em uma forma visual eficiente e atraente, os dados e as informações que precisam transmitir.

Para tornar possível essa representação, devemos obedecer a três requisitos fundamentais:

- simplicidade;
- clareza;
- veracidade.

Explore

Em grupos de quatro alunos, pesquisem sobre vagas oferecidas, em escolas públicas e privadas, em cursos de graduação que sejam opções do grupo para a continuidade do ensino médio. Confrontem esses dados com os respectivos números de candidatos havidos no ano anterior. Ilustrem essa comparação por meio de gráficos e tabelas em cartaz, no qual cada um redija um texto explicando o porquê da opção.

3.1 Tipos de gráfico

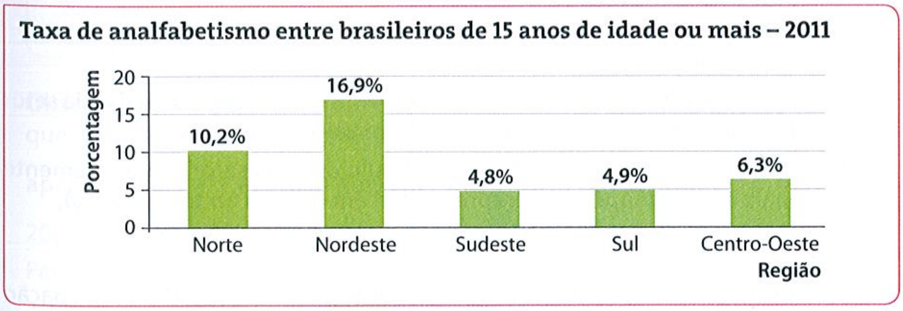
Se for possível e achar conveniente, levar os alunos à sala de informática da escola e mostrar como construir alguns tipos de gráficos usando planilhas eletrônicas.

Gráfico de barras (verticais ou horizontais)

Os **gráficos de barras verticais** apresentam os dados por meio de colunas (retângulos) dispostas em posição vertical. A altura de cada coluna corresponde à frequência (absoluta ou relativa) dos valores observados.

Veja um exemplo de gráfico de barras verticais:

ADILSON SECCO



Taxa de analfabetismo entre brasileiros de 15 anos de idade ou mais – 2011

Dados obtidos em: IBGE. *Síntese de indicadores sociais 2012*. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. Disponível em: www.ibge.gov.br Acesso em: 6 dez. 2012.

Não. Uma vez que as porcentagens foram calculadas com base nas pessoas de 15 anos ou mais de cada região, não podemos somá-las.

Reflita

A soma das porcentagens que estão indicadas no gráfico ao lado representa a porcentagem de analfabetismo das pessoas de 15 anos ou mais no Brasil?

Reúna-se com um colega, discutam e exponham suas respostas para a turma.

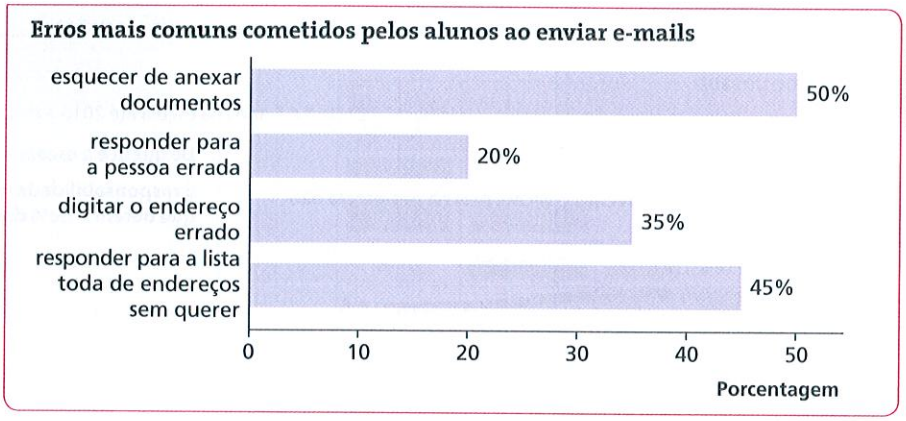
Outra forma de apresentar as informações coletadas é por meio de um **gráfico de barras horizontais**. Esse tipo de gráfico utiliza as barras (retângulos) dispostas em posição horizontal. Os comprimentos das barras correspondem à frequência (absoluta ou relativa) dos valores observados.

Veja um exemplo de gráfico de barras horizontais:

Reflita

Elabore uma hipótese sobre o motivo de a soma das porcentagens indicadas no gráfico ao lado ser maior que 100%.

Provavelmente foi permitido que cada aluno do grupo analisado escolhesse mais de uma das respostas.


Erros mais comuns cometidos pelos alunos ao enviar e-mails

Fonte: Escola Acesso.

ADILSON SECCO

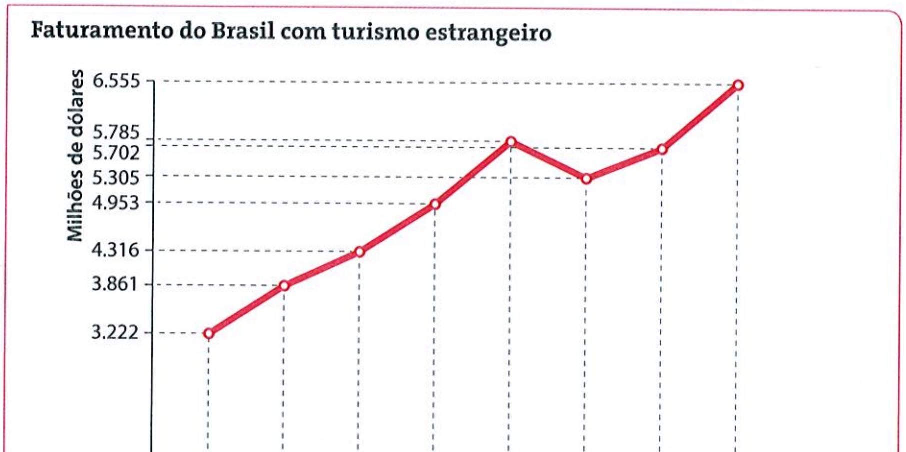
Gráfico de segmentos

Os **gráficos de segmentos** (ou **gráficos de linha**) são muito empregados para representar o comportamento de um conjunto de dados ao longo de um período. Para construir um gráfico de segmentos, adotamos um referencial parecido com o plano cartesiano, no qual os pontos correspondentes aos dados são marcados e, em seguida, unidos por meio de segmentos de reta.

Observe um exemplo de gráfico de segmentos:

Reflita

No gráfico ao lado, observa-se uma queda no faturamento durante o ano de 2009. Em relação ao faturamento verificado em 2008, qual foi o percentual de queda? ≃ 8,3


Faturamento do Brasil com turismo estrangeiro

Dados obtidos em: Ministério do Turismo. Disponível em: www.turismo.gov.br Acesso em: 3 jan. 2013.

ADILSON SECCO

Gráfico de setores

Os **gráficos de setores** apresentam os dados em um círculo, no qual cada setor indica a frequência (absoluta ou relativa) de um valor observado.

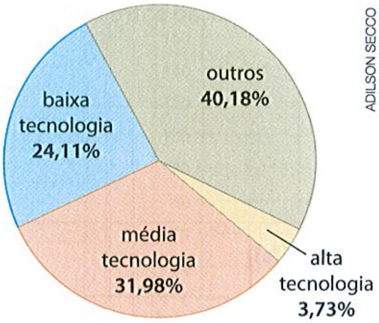
Nesse tipo de representação, a área e o ângulo de cada setor são diretamente proporcionais à porcentagem que representam em relação ao todo (100%).

Exemplo

Os produtos de alta tecnologia, como os aviões, não têm grande participação nas exportações brasileiras. Somente 3,73% das vendas nacionais são de mercadorias de alta tecnologia.

Veja como os dados da tabela a seguir podem ser representados em um gráfico de setores:

Exportações brasileiras (2011)	
Tipo de produto	**Porcentagem**
alta tecnologia	3,73%
média tecnologia*	31,98%
baixa tecnologia	24,11%
outros**	40,18%
Total	100%



ADILSON SECCO

* Soma dos produtos de média alta e média baixa tecnologia.
** Produtos não industrializados.

Dados obtidos em: Secretaria do Comércio Exterior (Secex)/Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comércio Exterior (MDIC). Disponível em: www.desenvolvimento.gov.br Acesso em: 13 nov. 2012.

Como há proporcionalidade direta entre o ângulo que define cada setor e a porcentagem correspondente, podemos calcular a medida do ângulo central de cada setor com regra de três simples.

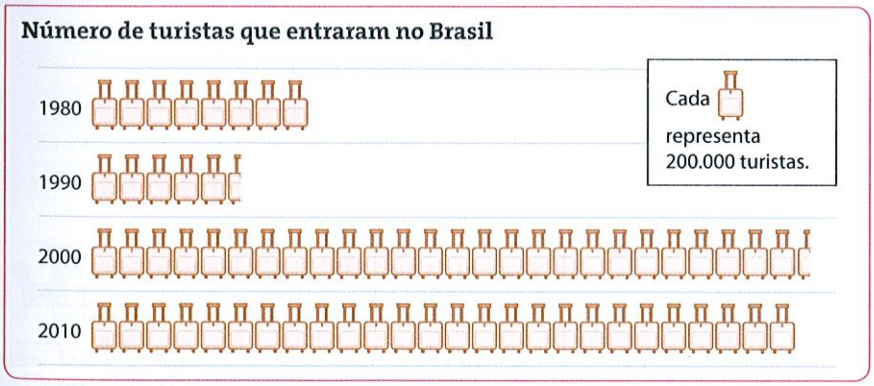
$$\begin{array}{lcl} 100\% & \text{———} & 360° \\ 3{,}73\% & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{3{,}73 \cdot 360°}{100} \simeq 13° \left\{ \begin{array}{l} \text{ângulo central do setor} \\ \text{correspondente às exportações} \\ \text{de "alta tecnologia"} \end{array} \right.$$

Analogamente, os setores correspondentes a "média tecnologia", "baixa tecnologia" e "outros", respectivamente, terão ângulos centrais cujas medidas aproximadas, em grau, são 115, 87 e 145.

■ Pictograma

Os gráficos chamados de **pictogramas** exibem os dados por meio de símbolos autoexplicativos que, geralmente, estão relacionados com o tema apresentado, o que confere eficiência e atratividade ao resultado final.

Exemplo



ADILSON SECCO

Número de turistas que entraram no Brasil	
1980	1.625.422
1990	1.091.067
2000	5.313.463
2010	5.161.379

Dados obtidos em: Ministério do Turismo. *Anuário Estatístico 2010.* Disponível em: www.braziltour.com Acesso em: 26 nov. 2012.

Observe que os valores do gráfico são aproximados, como no ano de 1980, em que 1.625.422 turistas entraram no Brasil, e o gráfico mostra uma quantidade aproximada de 1.600.000 turistas. Nesse caso, como cada 🧳 representa 200.000 turistas, ◧ (metade de um símbolo) representa 100.000 turistas.

Para construir um pictograma, é fundamental que:

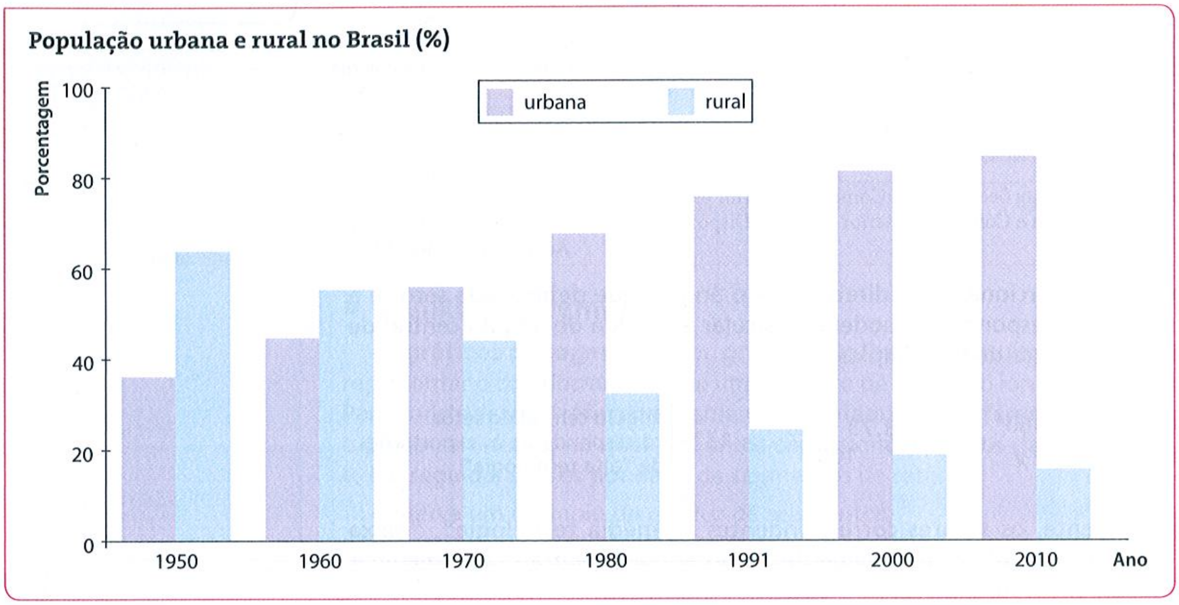
- todos os símbolos tenham o mesmo tamanho e valor;
- os espaços entre eles sejam sempre iguais;
- o critério de arredondamento não induza a uma falsa interpretação dos dados.

■ Gráfico múltiplo

Em algumas situações, é necessário representar simultaneamente duas ou mais características da amostra. Para facilitar a comparação entre características distintas, podemos construir um **gráfico múltiplo**.

Exemplos

a) Considere o gráfico abaixo.


População urbana e rural no Brasil (%)

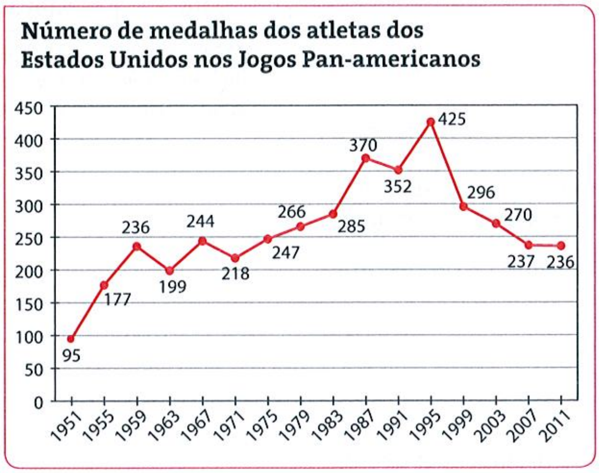
ADILSON SECCO

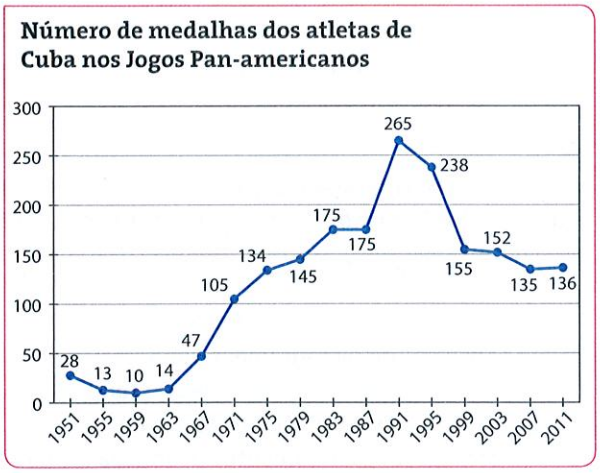
Dados obtidos em: IBGE. *Censo demográfico 2010.*
Disponível em: www.ibge.gov.br
Acesso em: 26 nov. 2012.

Com base na situação apresentada, vamos fazer algumas considerações.

O gráfico de colunas múltiplas (população urbana e rural) indica mudanças em alguns aspectos da população brasileira no período de 1950 a 2010. Cruzando as informações, podemos observar que a população rural predominou até 1960 e a partir da década de 1970 ocorre, progressivamente, maior concentração da população nas áreas urbanas.

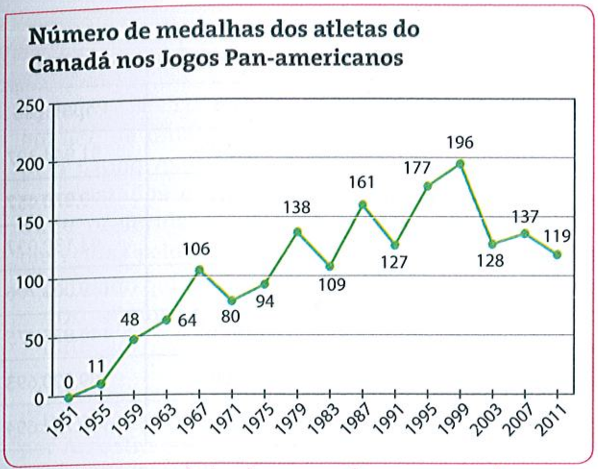
b) Observe os gráficos a seguir, que mostram o desempenho, em número total de medalhas, dos quatro países que conquistaram mais medalhas em todos os Jogos Pan-americanos até 2011.


Número de medalhas dos atletas dos Estados Unidos nos Jogos Pan-americanos

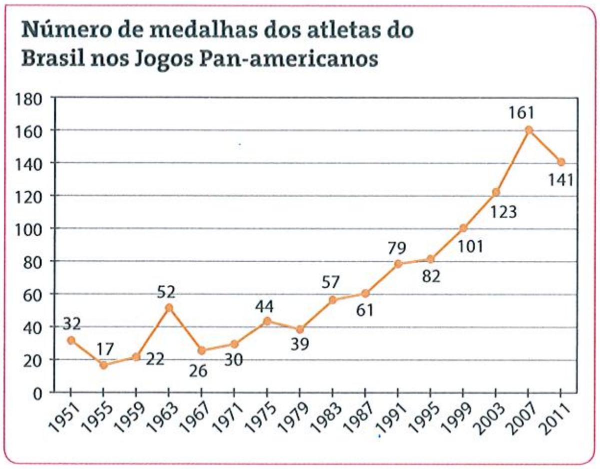

Número de medalhas dos atletas de Cuba nos Jogos Pan-americanos

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Número de medalhas dos atletas do Canadá nos Jogos Pan-americanos



Número de medalhas dos atletas do Brasil nos Jogos Pan-americanos



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

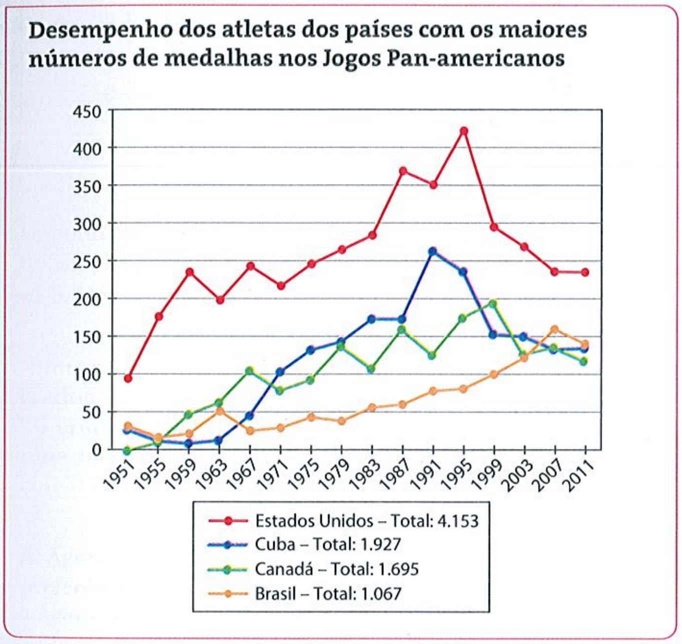
Se considerar conveniente, observe aos alunos que os quatro gráficos do exemplo **b** têm escalas diferentes, fato que dificulta mais ainda a comparação.

Dados obtidos em: *Quadro de medalhas de todos os Jogos Pan-americanos.* Disponível em: www.quadrodemedalhas.com Acesso em: 3 jan. 2013.

A análise isolada de cada gráfico mostra a evolução do número de medalhas de cada um desses países ao longo das edições dos Jogos Pan-americanos, porém não permite a comparação entre o desempenho desses países, o que, no entanto, se torna possível com a organização conjunta de todos os dados em um único gráfico. Veja:

ADILSON SECCO

Desempenho dos atletas dos países com os maiores números de medalhas nos Jogos Pan-americanos



Nesse gráfico de linhas múltiplas, é possível comparar o avanço no desempenho dos quatro países com os maiores números de medalhas nos Jogos Pan-americanos. Com as informações apresentadas, concluímos que em todos os Jogos Pan-americanos os Estados Unidos conquistaram maior número de medalhas em relação aos três outros. Mas, a partir de 1995, o número de medalhas conquistadas por esse país vem decrescendo. A partir dos Jogos Pan-americanos de 1979, até 2007, o Brasil é o único país que tem um número crescente de medalhas.

Este exemplo permite o desenvolvimento interdisciplinar com Educação física.

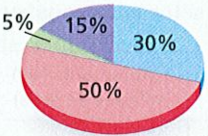
Dados obtidos em:
Quadro de medalhas de todos os Jogos Pan-americanos.
Disponível em: www.quadrodemedalhas.com
Acesso em: 3 jan. 2013.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

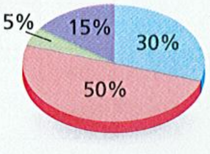
Exercícios resolvidos

R4. Duas instituições coletaram dados envolvendo uma mesma variável quantitativa discreta, conforme mostram os gráficos ao lado.
Em ambas as pesquisas, o índice 50% representa a mesma quantidade de objetos? E 5%? E 15%? E 30%? Justificar.

Pesquisa A



Pesquisa B



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

▸ ***Resolução***

Não podemos afirmar que esses índices representam a mesma quantidade de objetos em ambas as pesquisas, pois o enunciado do problema não indica o número de objetos que constituiu cada amostra; uma mesma taxa percentual aplicada a totais diferentes resulta em valores diferentes.

R5. A tabela ao lado mostra a população do Brasil segundo os censos realizados desde 1950 até 2010. Construir um pictograma que represente essas informações.

População do Brasil	
Ano	**População**
1950	51.944.397
1960	70.070.457
1970	93.139.037
1980	119.002.706
1991	146.825.475
2000	169.590.693
2010	190.732.694

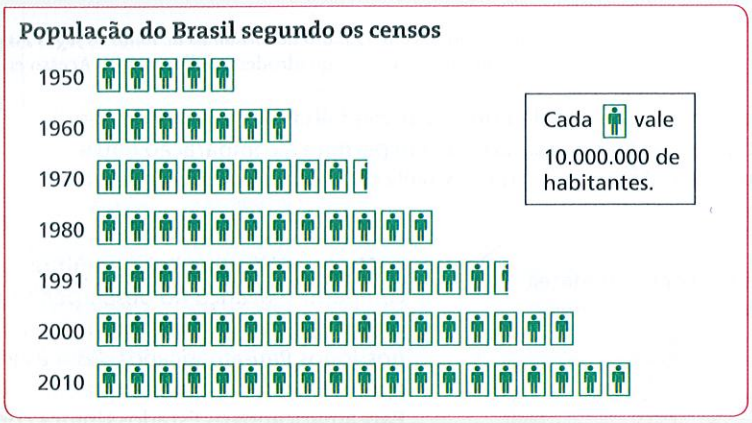
Dados obtidos em: www.ibge.gov.br
Acesso em: 26 nov. 2012.

▸ ***Resolução***

Para fazer um pictograma, temos de escolher um símbolo e definir previamente seu valor e o critério de arredondamento. Como os valores da tabela estão entre 50.000.000 e 190.000.000, cada símbolo pode representar 10.000.000 de habitantes. Assim, podemos arredondar:

51.944.397 para 50.000.000;
70.070.457 para 70.000.000;
93.139.037 para 95.000.000;
119.002.706 para 120.000.000;
146.852.475 para 145.000.000;
169.590.693 para 170.000.000;
190.732.694 para 190.000.000.

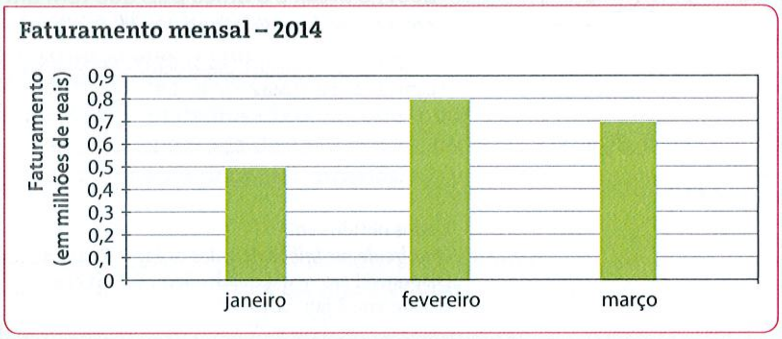
ADILSON SECCO



Comentar com os alunos que o símbolo escolhido poderia representar outro valor. Entretanto, é necessário que essa escolha seja adequada para não induzir falsas interpretações.

R6. O gráfico abaixo apresenta o faturamento da empresa A nos três primeiros meses de 2014. Representar esses valores em um gráfico de setores considerando a participação, em porcentagem, de cada mês no faturamento trimestral.

ADILSON SECCO



Fonte: Empresa A.

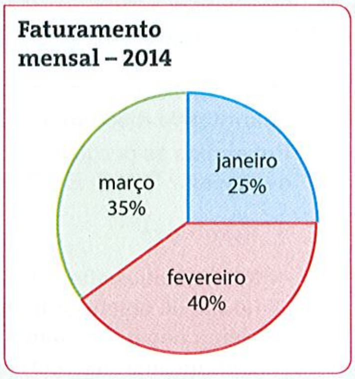
▸ ***Resolução***

Vamos construir uma tabela com os valores do gráfico e calcular a porcentagem que cada mês representa em relação ao faturamento total. Em seguida, determinaremos a medida do ângulo central de cada setor para construir o gráfico de setores.

Mês	Faturamento (em milhões de reais)	Porcentagem	Ângulo central de cada setor
jan.	0,5	(0,5 : 2) · 100% = 25%	25% de 360° = 90°
fev.	0,8	(0,8 : 2) · 100% = 40%	40% de 360° = 144°
mar.	0,7	(0,7 : 2) · 100% = 35%	35% de 360° = 126°
Total	2,0	100%	360°

Gráfico de setores

ADILSON SECCO



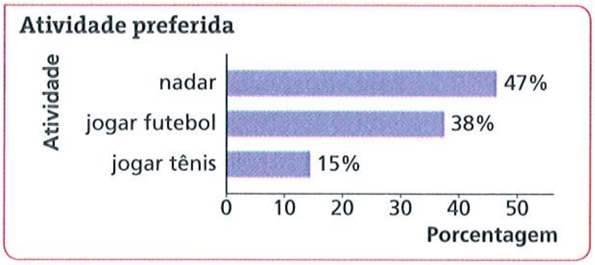
Fonte: Empresa A.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

12. O gráfico ao lado apresenta o resultado de uma pesquisa realizada pelo Clube Azul. Os sócios foram entrevistados e indicaram a atividade preferida entre três opções oferecidas pelo clube.

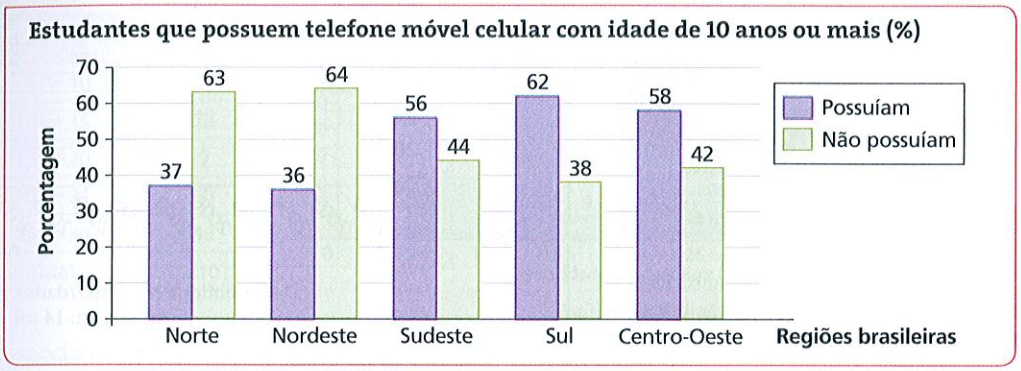
- Sabendo que foram entrevistados 400 sócios, quantos preferem natação? 188 sócios



ADILSON SECCO

Fonte: Clube Azul.

13. (Enem) Os dados do gráfico foram coletados por meio da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios.



ADILSON SECCO

Fonte: IBGE. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br>. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Supondo-se que, no Sudeste, 14.900 estudantes foram entrevistados nessa pesquisa, quantos deles possuíam telefone móvel celular? alternativa d

a) 5.513 **b)** 6.556 **c)** 7.450 **d)** 8.344 **e)** 9.536

14. Numa reunião para escolher o melhor trabalho realizado por um curso de graduação, estavam presentes 80 pessoas, das quais 32 eram sociólogos, 20 eram publicitários, 12 eram economistas e 16 psicólogos. Elabore uma tabela de distribuição de frequências absolutas e, com base nela, construa um gráfico de barras verticais. Ver resolução no Guia do professor.

15. b) meio de transporte preferido para uma viagem turística

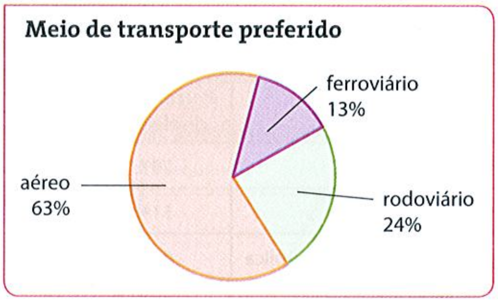
15. A Agência de Turismo Nova pesquisou a preferência por meio de transporte para uma viagem turística conforme mostra o gráfico ao lado.

a) De que tipo é esse gráfico? gráfico de setores

b) A que assunto se refere?

c) Segundo os dados da pesquisa, qual é o meio de transporte preferido para uma viagem turística? transporte aéreo

d) Determine as medidas aproximadas dos ângulos centrais dos setores correspondentes às porcentagens.
rodoviário: 86°, aéreo: 227°, ferroviário: 47°



ADILSON SECCO

Fonte: Agência de Turismo Nova.

16. A revista *Teen 10* costuma fazer levantamentos semanais das correspondências que chegam ao editorial. Se quiséssemos apresentar esses dados em um gráfico de setores, quantos graus deveria ter o ângulo central de cada setor? e-mails: 187,5°
cartas: 112,5°
fax: 60°

Correspondências recebidas pela revista *Teen 10*	
E-mails	250
Cartas	150
Fax	80

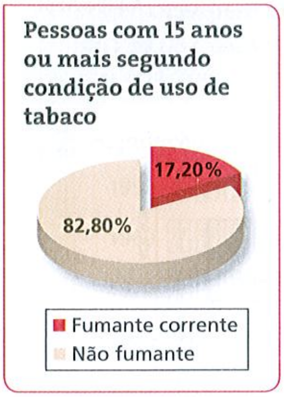
Fonte: Revista *Teen 10*.

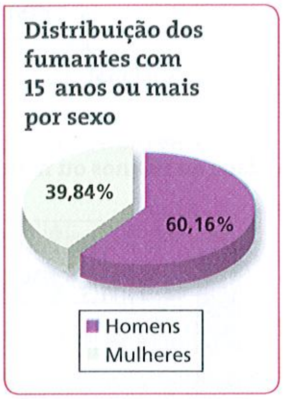
17. Em 2008, foi feita uma pesquisa sobre tabagismo entre os brasileiros com idade a partir de 15 anos. Os entrevistados estavam distribuídos conforme a tabela ao lado.

Distribuição da população com idade a partir de 15 anos por sexo	
Homens	47,80%
Mulheres	52,20%

Os gráficos a seguir mostram mais informações sobre a pesquisa realizada.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO





Dados obtidos em: IBGE. *PNAD 2008*. Pesquisa Especial de Tabagismo. Disponível em: www.ibge.gov.br Acesso em: 27 nov. 2012.

17. b) ≃ 14,8 milhões

Você pode resolver estes itens com um colega.

a) Sabendo que o número de pessoas com 15 anos ou mais, estimado em 2008, era aproximadamente 143,3 milhões, quantas eram as pessoas fumantes no grupo pesquisado? ≃ 24,6 milhões

b) Quantos eram os fumantes do sexo masculino?

c) Sabendo que aproximadamente 52,2% das pessoas pesquisadas eram do sexo feminino, quantas eram as mulheres não fumantes?
≃ 74,8 milhões

18. Na cidade A foi feita uma pesquisa sobre os candidatos ao cargo de prefeito. Foram entrevistados 4.000 eleitores.

Veja o que os eleitores acham dos candidatos:

Opinião dos eleitores sobre os candidatos a prefeito	
Opinião	**Porcentagem de eleitores**
são desonestos	80%
são competentes	51%
não se importam com a opinião pública	66%
são honestos	20%

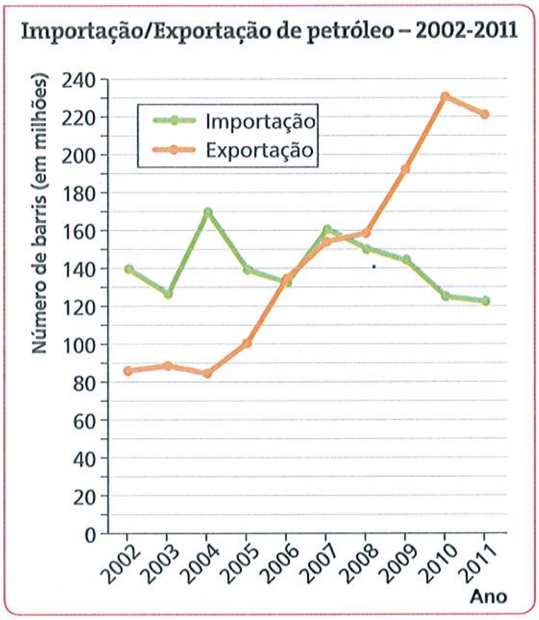
Fonte: Cidade A.

a) Os dados da tabela podem ser apresentados em um gráfico de setores? Justifique e, se sua resposta for afirmativa, construa o gráfico de setores.

b) É possível representar esses dados em um gráfico de barras verticais ou horizontais? Caso sua resposta seja afirmativa, construa um gráfico de cada tipo.
Ver resolução no Guia do professor.

19. O gráfico a seguir apresenta o comportamento da exportação e da importação de petróleo no período de 2002 a 2011, em número de barris, no Brasil.

ADILSON SECCO



Dados obtidos em: http://dados.gov.br Acesso em: 14 set. 2012.

Ver resolução no Guia do professor.

Com base no gráfico, responda às questões.

a) Quais são os períodos (anual) de maior crescimento e decrescimento nas importações? Indique o número aproximado de barris.

b) Qual é a variação percentual aproximada das exportações de 2002 a 2011? E das importações?

c) A que conclusão você pode chegar ao analisar o comportamento das duas variáveis nos períodos de 2002 a 2007 e de 2008 a 2011?

20. A tabela abaixo mostra a evolução da frota de veículos no Brasil desde 2000. Arredonde esses valores para a unidade mais próxima de milhão e, em seguida, construa um pictograma para representá-los.
Ver resolução no Guia do professor.

Frota de veículos no Brasil		
Ano	**Número de veículos**	
2000	30.265.548	30.000.000
2001	32.605.007	33.000.000
2002	34.913.465	35.000.000
2003	37.163.574	37.000.000
2004	39.769.033	40.000.000
2005	42.622.026	43.000.000
2006	45.956.774	46.000.000
2007	50.296.080	50.000.000
2008	55.575.913	56.000.000
2009	60.268.701	60.000.000
2010	64.817.974	65.000.000

Dados obtidos em: www.denatran.gov.br Acesso em: 27 nov. 2012.

18. a) Não, pois a soma de todas as porcentagens ultrapassa 100% — provavelmente porque os entrevistados puderam escolher mais de uma característica dos candidatos.

4 Histograma e polígono de frequências

4.1 Histograma

Quando temos de representar uma distribuição de frequências cuja variável tem seus valores agrupados em intervalos, costumamos utilizar um **histograma**.

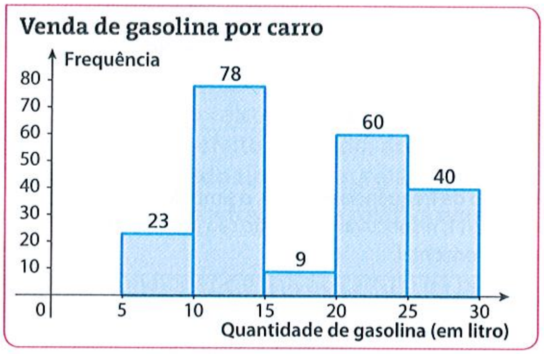
O **histograma** é um gráfico formado por retângulos justapostos cujas bases são construídas sobre o eixo das abscissas.

Exemplo

Vamos construir um histograma para a distribuição de frequências que representa o número de litros de gasolina vendidos por carro no posto RBA.

Venda de gasolina por carro

Quantidade de gasolina (em litro)	Frequência (f_i)
5 ⊢ 10	23
10 ⊢ 15	78
15 ⊢ 20	9
20 ⊢ 25	60
25 ⊢ 30	40
Total	210



ADILSON SECCO

Fonte: Posto de gasolina RBA.

Reflita

O que podemos observar comparando a área e a frequência absoluta de cada retângulo?

As áreas dos retângulos são proporcionais às frequências absolutas (f_i) das classes correspondentes.

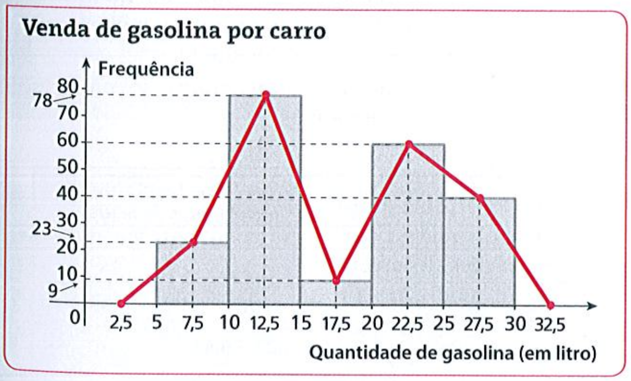
Analisando o histograma acima, percebemos que a maior altura é 78, ou seja, o intervalo que apresenta a maior frequência (78) está entre 10 (inclusive) e 15 litros de gasolina vendidos por carro.

4.2 Polígono de frequências

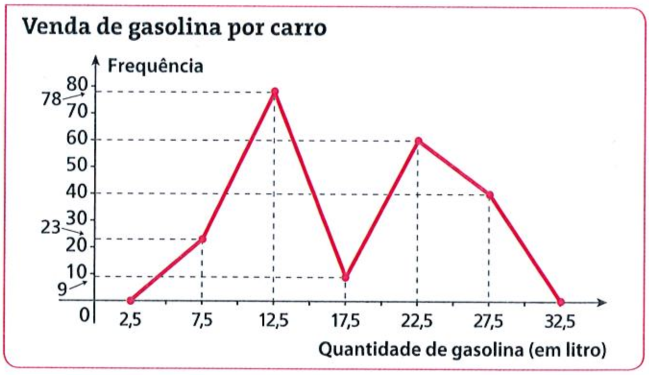
Partindo do histograma, é possível construir um gráfico de segmentos chamado **gráfico de curva poligonal** ou, mais comumente, **polígono de frequências**.

Exemplos

a) Vamos construir um polígono de frequências com base no histograma do exemplo anterior. Inicialmente, marcamos os pontos cuja abscissa seja o valor médio dos intervalos, e cuja ordenada seja a frequência da respectiva classe. A seguir, unimos, em sequência, esses pontos por segmentos de reta. Finalmente, completamos a curva poligonal acrescentando dois pontos de ordenada zero, cujas abscissas sejam o valor médio de um intervalo imediatamente inferior e o valor médio de um intervalo imediatamente superior.



Fonte: Posto de gasolina RBA.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

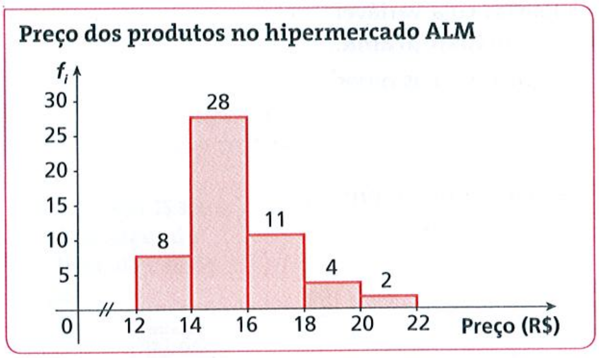
Fonte: Posto de gasolina RBA.

Observando o polígono de frequências, percebemos que o ponto mais alto ocorre para 12,5 litros de gasolina e 78 carros, o que indica que o abastecimento mais frequente no posto RBA é de 12,5 litros.

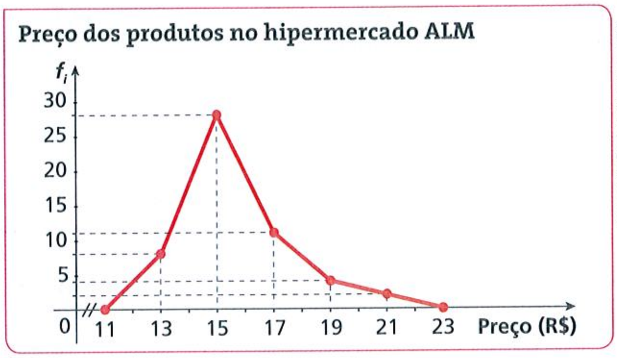
b) Vamos representar, por meio de um histograma e de um polígono de frequências, a distribuição de frequências que apresentam os preços (em real) de 50 produtos diversificados no hipermercado ALM.

Preço dos produtos do hipermercado ALM					
Preço (R$)	12 ⊢ 14	14 ⊢ 16	16 ⊢ 18	18 ⊢ 20	20 ⊢ 22
Frequência (f_i)	8	28	11	4	2

Fonte: Hipermercado ALM.



Fonte: Hipermercado ALM.



Fonte: Hipermercado ALM.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

Observe que no histograma e no polígono de frequências usamos o símbolo ⫽ para indicar que os intervalos de 0 a 12 e de 0 a 11, respectivamente, não são proporcionais aos demais intervalos marcados no eixo horizontal.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução das questões **21**, **22**, **23** e **24** no Guia do professor.

21. Na fábrica de lâmpadas Ilumine foi feito um teste com 150 lâmpadas. Veja os resultados na tabela ao lado.

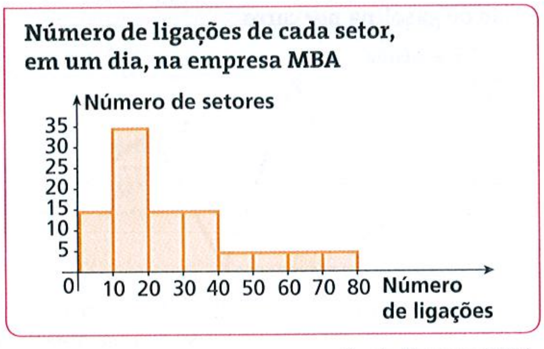
- Com as informações da tabela, construa um histograma e um polígono de frequências.

Duração das lâmpadas	
Duração (em hora)	**Número de lâmpadas (f_i)**
0 ⊢ 1.000	5
1.000 ⊢ 2.000	10
2.000 ⊢ 3.000	42
3.000 ⊢ 4.000	75
4.000 ⊢ 5.000	18

Fonte: Fábrica de lâmpadas Ilumine.

22. A empresa MBA, visando saber o número de ramais telefônicos que precisava disponibilizar, registrou em um dia o número de ligações feitas em cada setor. Os dados geraram o histograma a seguir.

ADILSON SECCO



Fonte: Empresa MBA.

- Baseando-se no histograma, construa uma tabela com as frequências: absoluta, relativa, absoluta acumulada e relativa acumulada.

23. Os dados a seguir referem-se aos gastos, em real, com energia elétrica de 50 apartamentos de um condomínio em determinado mês.

149	163	151	135	137	167
95	119	147	153	127	149
90	202	172	148	154	158
82	206	123	144	109	167
157	150	130	187	139	149
141	183	114	191	129	158
108	178	102	197	165	168
171	116	111	213	128	166
185	175				

Faça uma tabela com as distribuições das frequências absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada dos dados acima, distribuídos em 7 intervalos, com amplitude 20 (inicie com 80). Depois, faça o histograma, o polígono de frequências e responda à questão:

Na maioria dos apartamentos, quanto foi pago de energia elétrica nesse mês?

Foram pagos de 140 a 160 reais.

24. Uma seguradora fez uma pesquisa para saber o valor das indenizações decorrentes de acidentes de trabalho.

- Faça o histograma relativo aos dados da tabela ao lado.

Valor das indenizações decorrentes de acidente de trabalho	
Indenização (R$)	**Número de acidentes**
[500, 1.500[	20
[1.500, 2.500[	60
[2.500, 3.500[	50
[3.500, 4.500[	35

Fonte: Seguradora.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

5 Frequência relativa e probabilidade

Em algumas situações, pode-se determinar a probabilidade de ocorrer um evento usando a frequência relativa.

Para calcular o valor da apólice de seguros de um automóvel, por exemplo, considera-se, entre outros fatores, a probabilidade de um veículo daquele modelo ser roubado. Para determinar essa probabilidade realiza-se um levantamento do número de carros roubados daquele modelo em relação ao total de carros do mesmo modelo.

Considere que determinado modelo, em certo período, teve 38 carros roubados a cada mil. Escrevendo essa relação em forma de razão, temos:

$$p = \frac{38}{1.000} = \frac{3,8}{100} = 3,8\%$$

Portanto, podemos afirmar que a probabilidade de um carro desse modelo ser roubado, no período estudado, era de 3,8%, ou seja, 38 carros em mil.

A frequência relativa também pode auxiliar no cálculo da probabilidade de, por exemplo, um medicamento em estudo fazer o efeito desejado; acontecer um acidente aéreo ou alguma sequela após determinado tipo de cirurgia.

Em situações como essas é possível considerar que a frequência relativa equivale à "probabilidade de ocorrer o evento".

Porém, a frequência relativa é usada com maior eficiência no cálculo de probabilidades em situações nas quais há uma quantidade grande de experimentos. Se, por exemplo, lançarmos um dado duas vezes e sair a face 1 nos dois lançamentos, a frequência relativa é $f_r = \frac{2}{2} = 100\%$. Nesse caso, não podemos usar a frequência como a probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado, pois o número de experimentos é muito pequeno.

Mas, se lançarmos 50 vezes o dado e sair a face 1 em 12 lançamentos, a frequência relativa é $f_r = \frac{12}{50} = 24\%$. Ainda com esse número de experimentos não é possível usar a frequência relativa no cálculo da probabilidade em questão.

Porém, se em 100.000 lançamentos sair a face 1 em 16.595, temos como frequência relativa $f_r = \frac{16.595}{100.000} = 16,595\%$. Nesse caso, o número de ocorrências já é grande o suficiente para que a frequência seja usada na determinação da probabilidade.

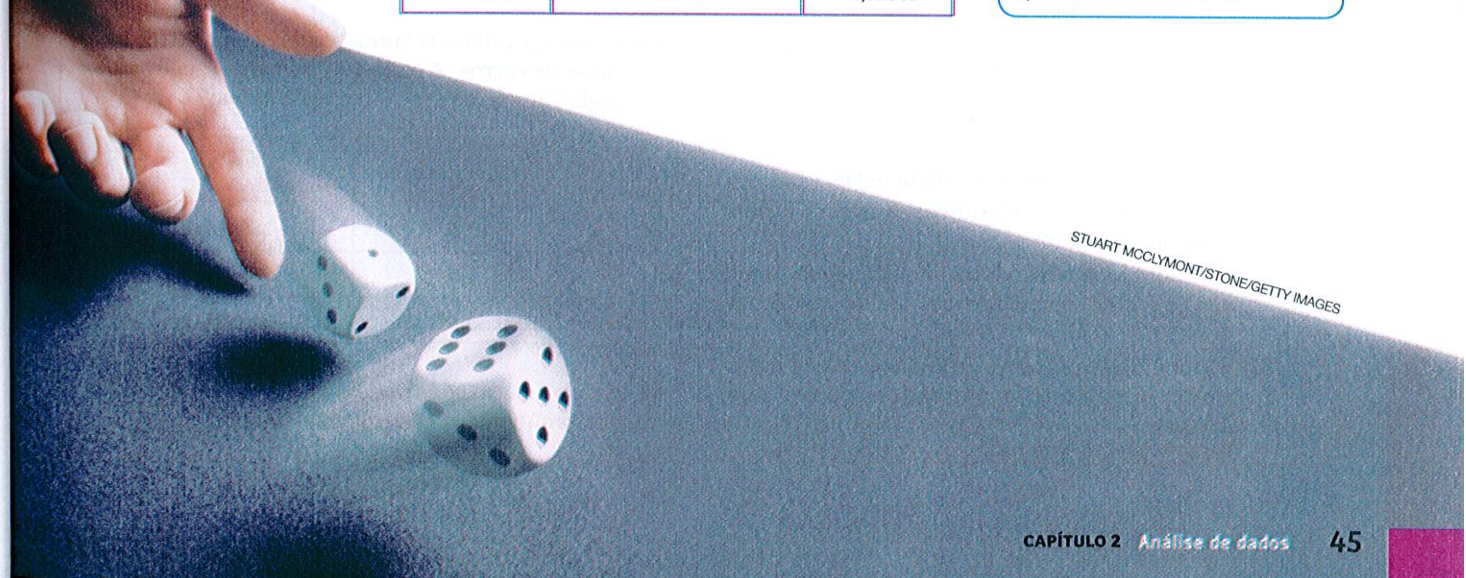
Número de lançamentos	Frequência absoluta de ocorrência da face 1	Frequência relativa
2	2	100%
50	12	24%
100.000	16.595	16,595%

Observação

Para calcular a probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado, dividimos o número de elementos n(*E*) do evento *E* (face 1) pelo número de elementos n(*S*) do espaço amostral *S* (faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6).

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6} = 0,1666...$$

A probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado é aproximadamente 17%.



STUART MCCLYMONT/STONE/GETTY IMAGES

Exercício resolvido

R7. Em 150 lançamentos de uma moeda, obteve-se o resultado mostrado na tabela ao lado.

a) Construir uma tabela de frequências.

b) O modelo probabilístico que estabelece probabilidades iguais para "cara" e "coroa" parece adequado para esse caso?

Face	Número de vezes
cara	86
coroa	64

▶ ***Resolução***

a) Calculando as frequências relativas, podemos completar a tabela.

b) Como as frequências são diferentes (face "cara": aproximadamente 57,3%; face "coroa": aproximadamente 42,7%), o evento não é equiprovável, então o modelo probabilístico que estabelece probabilidades iguais não é adequado.
Podemos inferir duas possibilidades:

- A moeda não é "honesta", pois a chance de sair face "cara" é maior.
- A quantidade de experimentos foi insuficiente para usar a frequência relativa na determinação da probabilidade de ocorrer face "cara" ou "coroa".

Face	Número de vezes (frequência absoluta)	Frequência relativa
cara	86	$\simeq$ 57,3%
coroa	64	$\simeq$ 42,7%

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução no Guia do professor.

25. Um dado foi lançado 1.000 vezes com o resultado mostrado na tabela ao lado.

a) Construa uma tabela de frequências.

b) Analise se, com essa quantidade de lançamentos, podemos considerar a frequência relativa como a probabilidade de sair determinada face no lançamento desse dado. Elabore uma conclusão.

Face	Número de vezes
1	150
2	175
3	163
4	166
5	174
6	172

26. Uma grife de moda jovem fez o levantamento, ao longo de um mês, da quantidade de camisetas que vendeu.

Cor da camiseta	Quantidade vendida
branca	4.200
preta	3.600
azul	1.200
vermelha	1.800
rosa	600
amarela	600

a) Construa uma tabela de frequências.

b) Quantas camisetas brancas e pretas foram vendidas ao todo?

c) Que porcentagem do total de camisetas vendidas pela grife representa a venda de camisetas pretas?

d) Se uma das camisetas vendidas é selecionada ao acaso, qual é a probabilidade de que ela seja amarela?

Ver resolução no Guia do professor.

27. Uma pesquisa realizada com os moradores de um bairro próximo a uma indústria siderúrgica apresentou o seguinte resultado:

Porcentagem da população	Olhos irritados	Coriza	Tosse	Problemas respiratórios
10%	X	X	—	—
15%	—	X	X	X
5%	X	X	X	X
45%	X	—	—	—
25%	—	—	—	—

As pessoas que apresentam pelo menos três desses sintomas são aconselhadas a fazer um acompanhamento médico.

Qual é a probabilidade de encontrar, nesse bairro, pessoas que necessitam de acompanhamento médico? 20%

28. Uma seguradora fez uma pesquisa sobre três modelos de carros. A cada 10.000 carros segurados, registram-se os seguintes resultados:

Modelo do carro	Quantidade de carros roubados
A	380 3,8%
B	289 2,89%
C	254 2,54%

- Com base nesses dados, calcule a probabilidade de roubo para cada modelo citado.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. Em uma pesquisa realizada em uma escola com 550 alunos matriculados foram coletados os seguintes dados:

(A) Idade

(B) Grau de escolaridade

(C) Sexo

(D) Número de disciplinas cursadas no ano

(E) Tempo gasto diário de estudo

Sabendo que foram selecionados 200 alunos aleatoriamente para participar da pesquisa, responda:

a) Qual é a população e a amostra da pesquisa. População: 550 alunos matriculados na escola; amostra: 200 alunos

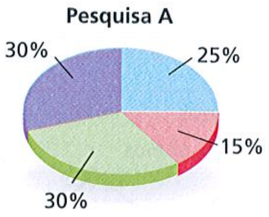
b) Identificar e classificar as variáveis pesquisadas.
Variável qualitativa nominal: C; variável qualitativa ordinal: B; variáveis quantitativas contínuas: A e E; variável quantitativa discreta: D.

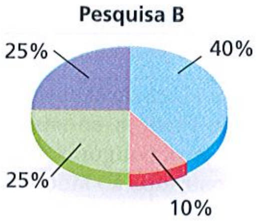
2. Observe os dados (medidas de comprimento em metro) obtidos em uma pesquisa:

3,20	3,27	3,45	3,56	3,53	3,98	3,22	3,28	3,87	3,02
3,75	3,24	3,43	3,92	3,73	3,48	3,12	3,32	3,41	3,05

Agrupe os dados em 5 intervalos e construa uma tabela com as distribuições das frequências absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada. Ver resolução no Guia do professor.

3. Os gráficos abaixo referem-se a duas pesquisas diferentes envolvendo a mesma variável quantitativa discreta.

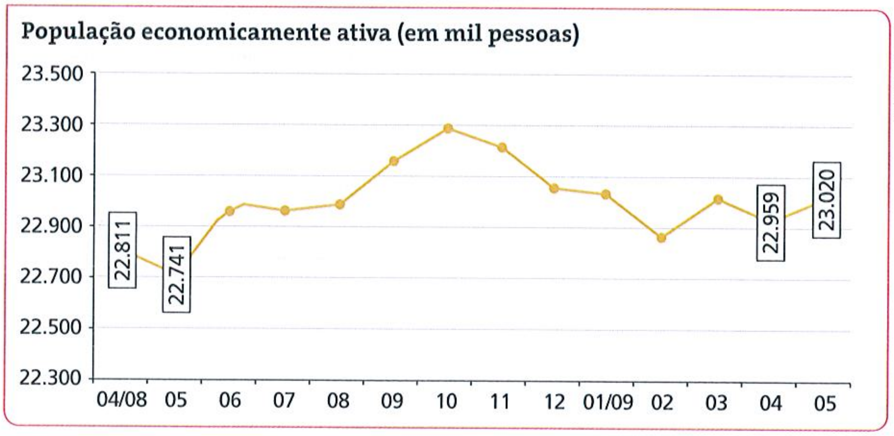




ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Sabendo que na pesquisa A foi considerada uma amostra de 800 objetos, quantos objetos foram pesquisados em B, se os 25% dos objetos pesquisados em A equivalem aos 40% dos objetos pesquisados em B? 500 objetos

4. (Enem) O gráfico ao lado mostra a evolução, de abril de 2008 a maio de 2009, da população economicamente ativa para seis Regiões Metropolitanas pesquisadas.



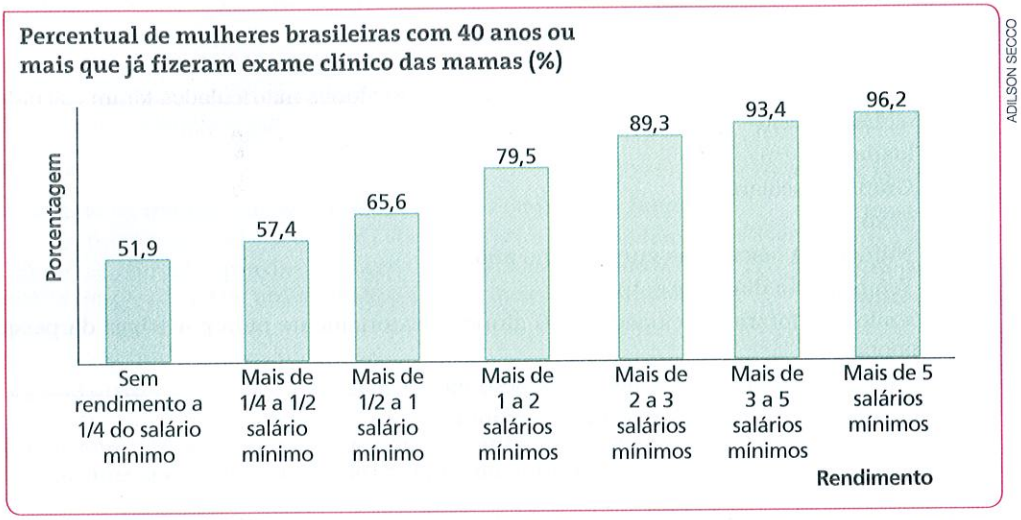
ADILSON SECCO

Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Mensal de Emprego. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br>.

Considerando que a taxa de crescimento da população economicamente ativa, entre 05/09 e 06/09, seja de 4%, então o número de pessoas economicamente ativas em 06/09 será igual a: alternativa d

a) 23.940 **b)** 32.228 **c)** 920.800 **d)** 23.940.800 **e)** 32.228.000

5. Observe o gráfico ao lado e responda às questões.



Percentual de mulheres brasileiras com 40 anos ou mais que já fizeram exame clínico das mamas (%)

Dados obtidos em: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios 2008.

a) Que percentual de mulheres brasileiras entre 20 e 30 anos já realizou exame clínico das mamas? Não há dados para responder.

b) Com o auxílio do gráfico, é possível observar alguma relação entre o rendimento mensal e o número de mulheres com 40 anos ou mais que já realizaram exames preventivos das mamas?

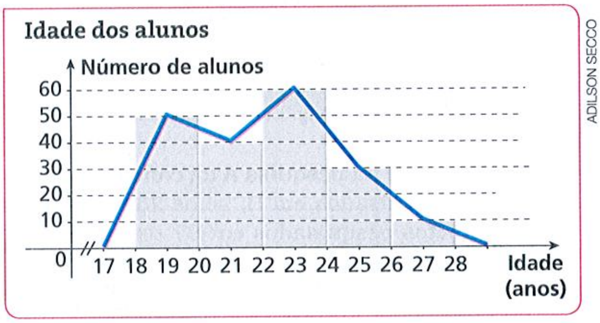
c) Em sua opinião, de que forma esses dados poderiam ajudar numa campanha de conscientização? resposta pessoal.

5. b) Quanto maior o rendimento, maior é a quantidade de mulheres que tiveram acesso aos exames preventivos.

6. Analisando a idade de seus alunos, a Faculdade Planeta construiu o histograma e o polígono de frequências mostrados ao lado.

a) Quantas pessoas estudam nessa faculdade? 190 pessoas

b) Qual faixa etária representa a maior concentração de estudantes? Que porcentagem ela representa em relação à quantidade de alunos da faculdade?
22 ⊢ 24; aproximadamente 32%



Idade dos alunos

Fonte: Faculdade Planeta.

7. Um *site*, voltado para internautas entre 13 e 18 anos de idade, perguntou a seus visitantes na primeira quinzena de janeiro de 2014:

"*De que forma os colegas influenciam na sua vida?*"

Eles obtiveram os resultados apresentados nesta tabela:

De que forma os colegas influenciam na sua vida?	
Porcentagem	**Resposta**
50%	"de forma positiva"
20%	"não influenciam"
5%	"de forma negativa"
25%	não responderam

Fonte: *Site* estudado.

Ver resolução no Guia do professor.

a) Faça um gráfico de setores com essas informações.

b) Sabendo que, nessa quinzena, 2.000 internautas foram pesquisados, faça um gráfico de barras, horizontais ou verticais, mostrando o número de internautas que participaram da pesquisa.

8. Observe ao lado os dados de uma pesquisa sobre as taxas de desemprego em algumas regiões metropolitanas.

a) Em 2011, que região apresentada teve maior diminuição percentual de desemprego em relação a 2010? região metropolitana de Recife

b) Faça um gráfico de colunas lado a lado comparando os resultados de 2010 com os de 2011. Ver resolução no Guia do professor.

Taxa de desemprego		
Região	**2010**	**2011**
Distrito Federal	13,6%	12,4%
Belo Horizonte	8,4%	7,0%
Fortaleza	9,4%	8,9%
Porto Alegre	8,7%	7,3%
Recife	16,2%	13,5%
Salvador	16,6%	15,3%
São Paulo	11,9%	10,5%

Dados obtidos em:
www.dadosefatos.turismo.gov.br
Acesso em: 7 jan. 2013.

9. A tabela ao lado apresenta o número de passageiros que desembarcaram no Brasil em voos internacionais em alguns meses de 2012.

a) Em sua opinião, que tipo de gráfico representaria de forma mais clara essas informações? Resposta possível: gráfico de segmentos

b) Construa, se possível usando uma planilha eletrônica, o gráfico que você escolheu no item anterior.
Ver resolução no Guia do professor.

Desembarques no Brasil em voos internacionais (2012)	
Mês	**Número de passageiros**
Janeiro	955.994
Fevereiro	801.714
Março	751.583
Abril	699.550
Maio	715.009
Junho	735.122
Julho	839.663
Agosto	749.819
Setembro	758.300
Outubro	806.123
Novembro	694.747

Dados obtidos em:
http://sistemaped.dieese.org.br
Acesso em: 7 jan. 2013.

Aprofundamento

10. Em uma pesquisa as rodovias brasileiras podiam ser classificadas em: "com pavimento bom ou ótimo" ou "com pavimento regular, ruim ou péssimo".

MODELO

Classificação das rodovias brasileiras			
Ano	**Porcentagem**	**Classificação**	**Extensão**
2011	52,1%	com pavimento bom ou ótimo	≃ 49.813 km
2012	46%	com pavimento regular, ruim ou péssimo	≃ 43.981 km

Fonte: CNT. *Pesquisa Rodoviária 2011, 2012.*
Disponível em: www.cnt.org.br
Acesso em: 3 dez. 2012.

Supondo que nos anos de 2011 e 2012 não houve alteração na extensão das rodovias brasileiras:

a) Copie a tabela, complete-a e calcule a extensão correspondente ao pavimento regular, ruim ou péssimo em 2011. ≃ 45.797 km

b) Que conclusão você pode tirar em relação à pavimentação das estradas brasileiras sabendo que, em 2010, 54,1% delas foram classificadas com pavimento bom ou ótimo?
Ver resolução no Guia do professor.

Autoavaliação

Leia atentamente as questões a seguir e responda-as em seu caderno.

1. A parcela aleatória da população determinada para representá-la é chamada de: alternativa b

a) variável **c)** rol
b) amostra **d)** dados brutos

2. Ao nascer, os bebês têm a massa e o comprimento medidos. Essas variáveis obtidas são: alternativa c

a) distintas
b) qualitativas
c) quantitativas contínuas
d) quantitativas discretas

3. A distribuição de frequências relaciona: alternativa d

a) intervalo e intervalo
b) amostra e população
c) amostra e tabela
d) variável e frequência

4. Uma loja de roupas fez um levantamento sobre as quatro cores de camisetas mais vendidas durante um mês. Para organizar as informações, foi elaborada a tabela a seguir, na qual os valores de *A*, *B* e *C* são: alternativa d

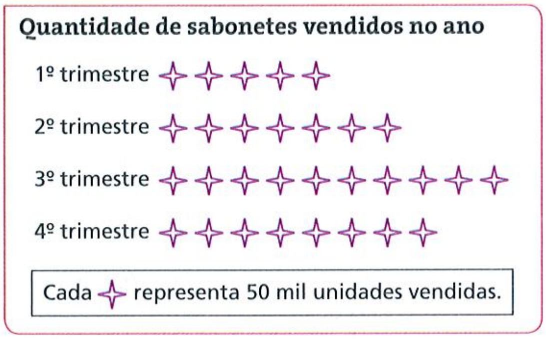
Cor	Frequência absoluta	Frequência relativa
branca	90	15%
preta	210	*B*
azul	180	30%
vermelha	120	*C*
Total	*A*	100%

a) 400; 52%; 30% **c)** 510; 40%; 25%
b) 300; 70%; 40% **d)** 600; 35%; 20%

5. Em um gráfico de setores, 25% do total corresponde a um ângulo de: alternativa a

a) 90° **b)** 270° **c)** 180° **d)** 360°

6. A fábrica de sabonetes Limpinho elaborou o pictograma a seguir para representar a quantidade de sabonetes vendidos durante o ano passado. Observando o gráfico, pode-se afirmar que, no 3º trimestre, essa empresa vendeu ______ sabonetes.
alternativa b



ADILSON SECCO

Fonte: Fábrica de sabonetes Limpinho.

a) 250 mil **c)** 400 mil
b) 500 mil **d)** 350 mil

7. Para construir um histograma, marcamos no eixo das ordenadas: alternativa a

a) as frequências absolutas ou relativas
b) os limites de cada intervalo
c) o ponto médio de cada intervalo
d) a amplitude de cada intervalo

8. O polígono de frequências apresenta pontos cuja abscissa é ______ de cada intervalo. alternativa a

a) o valor médio
b) o limite superior
c) o limite inferior
d) a frequência absoluta

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Reconhecer as variáveis utilizadas em uma pesquisa.	X	X						
Organizar dados e construir tabelas com distribuições de frequências.			X	X				
Interpretar dados apresentados por meio de gráficos diversos.						X		
Construir gráficos.					X			
Interpretar e construir histogramas e polígonos de frequências.							X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	26 a 28	26 a 28	29 a 31	32 a 34	35 a 42	35 a 42	43 e 44	43 e 44

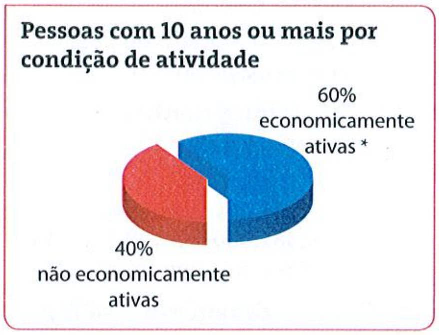
Resolução comentada

Análise de dados

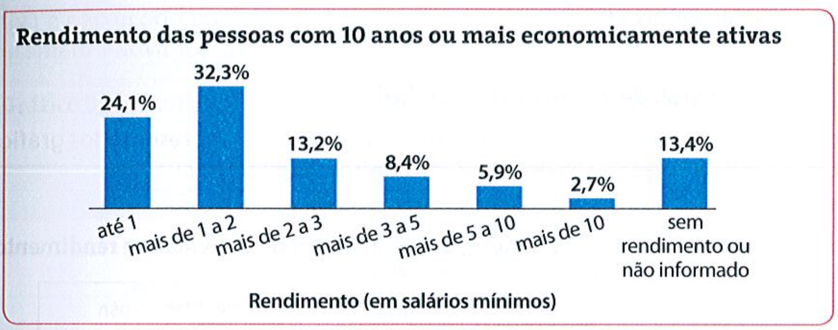
Problema

Observe a tabela e os gráficos a seguir, elaborados com base nos dados da *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílio 2011* (PNAD), feita pelo IBGE.

População por grupos de idade	
Idade	**Número de pessoas (em milhares)**
de 0 a 9 anos	28.256
de 10 a 19 anos	34.243
de 20 a 29 anos	32.319
de 30 a 39 anos	30.099
de 40 a 49 anos	26.225
50 anos ou mais	44.101
Total	195.243


Pessoas com 10 anos ou mais por condição de atividade

* Foram consideradas economicamente ativas as pessoas que estavam trabalhando ou tinham tomado alguma providência efetiva de procura de trabalho na semana da pesquisa.


Rendimento das pessoas com 10 anos ou mais economicamente ativas

Considerando os dados apresentados, o número aproximado de pessoas com 10 anos ou mais, economicamente ativas e que recebiam no máximo 1 salário mínimo na ocasião da pesquisa, em milhões, é:

a) 8
b) 24
c) 43
d) 100
e) 167

Resolução

Vamos analisar os dados da tabela e dos dois gráficos.

Os dados indicados na tabela apresentam o número de pessoas segundo a faixa etária. Já o gráfico de setores apresenta dados específicos da população de 10 anos ou mais, classificando-a em dois grupos: "economicamente ativa" e "não economicamente ativa". O gráfico de barras detalha o rendimento da população de 10 anos ou mais economicamente ativa.

Resolveremos o problema com os dados fornecidos e, em seguida, mostraremos outras formas gráficas de representar esses dados.

Pergunta-se a quantidade de pessoas que têm as seguintes características: 10 anos ou mais, economicamente ativas e que recebem até 1 salário mínimo. Analisando as informações apresentadas, temos:

- **Pessoas com 10 anos ou mais**

Com os dados da tabela, podemos obter o número de pessoas com 10 anos ou mais adicionando o número de pessoas dos grupos "de 10 a 19 anos", "de 20 a 29 anos", "de 30 a 39 anos", "de 40 a 49 anos" e "50 anos ou mais" ou, simplesmente, subtraindo o número de pessoas do grupo "de 0 a 9 anos" do número total de pessoas.

Obtemos, assim, o número de pessoas com 10 anos ou mais: 166.987.000 (note que os números de pessoas na tabela estão em milhares).

- **Pessoas economicamente ativas**

Para obter o número de pessoas economicamente ativas recorremos ao gráfico de setores.

Pelo gráfico, 60% das pessoas com 10 anos ou mais são economicamente ativas, e 60% de 166.987.000 são 100.192.200. Assim, 100.192.200 pessoas com 10 anos ou mais são economicamente ativas.

- **Pessoas que recebem até 1 salário mínimo**

Das pessoas economicamente ativas, 24,1% recebem até 1 salário mínimo, e 24,1% de 100.192.200 são aproximadamente 24.146.320. Portanto, cerca de 24 milhões de pessoas com 10 anos ou mais e economicamente ativas recebem no máximo 1 salário mínimo.

Resposta: alternativa b

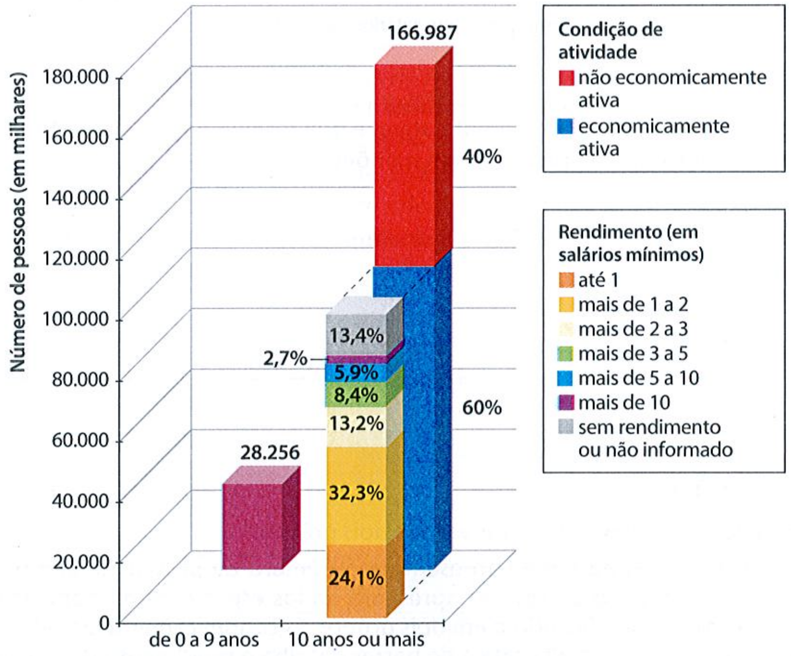
É possível resolver esse problema por estimativas, o que fornece uma noção da ordem de grandeza da resposta. Mesmo não sendo exata, essa prática antecipa a sequência de cálculos da resolução, auxilia na análise do resultado obtido no cálculo, além de ser mais rápida.

- **Número aproximado de pessoas com 10 anos ou mais:**
  195 milhões − 28 milhões ≃
  ≃ 170 milhões
- **Número aproximado de pessoas economicamente ativas:**
  60% de 170 milhões ≃
  ≃ 100 milhões
- **Número aproximado de pessoas economicamente ativas com até 1 salário mínimo:**
  24% de 100 milhões =
  = 24 milhões

Outras formas de representar os dados

Os dados apresentados na tabela e nos gráficos podem ser representados graficamente de outras formas. Observe algumas dessas formas:

Gráfico 1 Distribuição da população quanto à condição de atividade e rendimento



ADILSON SECCO

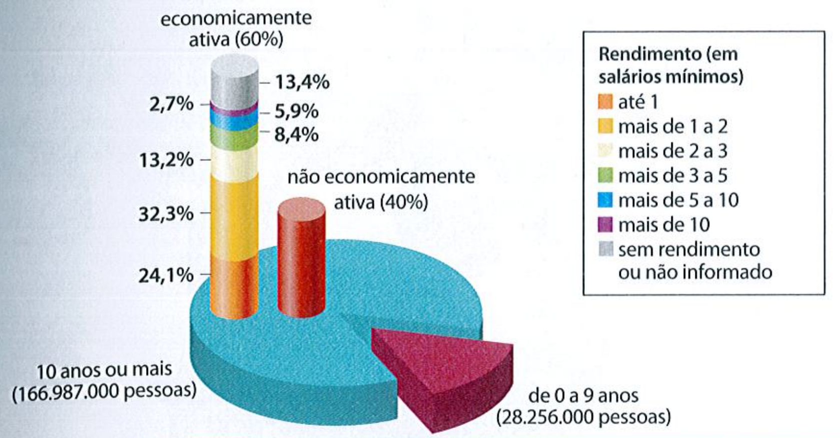
Nesses gráficos unimos as classes apresentadas na tabela referentes à população com 10 anos ou mais ("de 10 a 19 anos", "de 20 a 29 anos", "de 30 a 39 anos", "de 40 a 49 anos" e "50 anos ou mais"), perfazendo um grupo de 166.987.000 pessoas, que representa a população investigada no problema.

A representação da faixa etária populacional em colunas favorece a comparação entre os valores.

A distribuição por faixa etária foi aqui representada em um gráfico de colunas. A coluna que representa a população com 10 anos ou mais foi destacada para representar, desse grupo, a porcentagem de economicamente ativos e não economicamente ativos. Da coluna que representa a população economicamente ativa detalhou-se a porcentagem referente a cada faixa de rendimento.

ADILSON SECCO

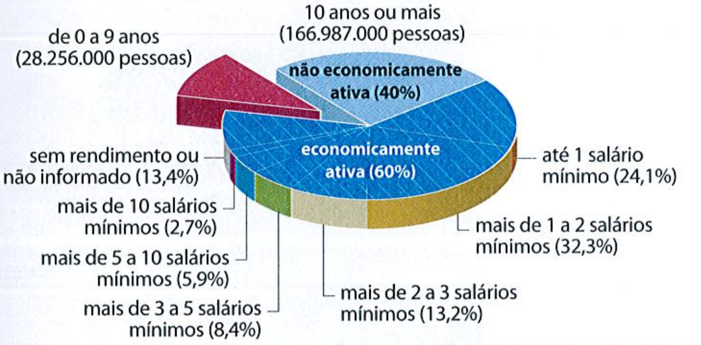
Gráfico 2 **Distribuição da população quanto à condição de atividade e rendimento**



A distribuição por faixa etária agora foi representada em um gráfico de setores. Sobre o setor que representa a faixa da população com 10 anos ou mais construíram-se duas colunas cilíndricas, que representam a população economicamente ativa e não economicamente ativa. A coluna que representa a população economicamente ativa foi dividida segundo as classes de rendimento.

ADILSON SECCO

Gráfico 3 **Distribuição da população quanto à condição de atividade e rendimento**



Essa representação permite:

- **comparar a faixa das pessoas que têm 10 anos ou mais com toda a população;**
- **comparar a faixa da população economicamente ativa à das pessoas com 10 anos ou mais ou em relação a toda a população;**
- **comparar a quantidade de pessoas de cada faixa de rendimento com a população total.**

Nessa representação, a distribuição por faixa etária também foi mostrada em um gráfico de setores. O setor que representa a faixa da população com 10 anos ou mais foi redividido entre economicamente ativa e não economicamente ativa. Por sua vez, o setor que representa a população economicamente ativa foi dividido em setores menores, segundo as classes de rendimento.

Comparem as resoluções

Escolham uma das representações (Gráficos 1, 2 ou 3) que vocês acharam que expressa melhor os dados e justifiquem sua escolha.

Pensem em uma forma diferente de representar graficamente esses dados e façam a representação no caderno ou no computador. resposta pessoal

Variação do problema

a) aproximadamente 43.383.223
b) aproximadamente 84.962.986

Segundo dados do *PNAD 2011*, das pessoas com 10 anos ou mais economicamente ativas, têm-se, ainda, que:

- aproximadamente 56,7% são homens e 43,3%, mulheres;
- aproximadamente 84,8% são de área urbana e 15,2%, de área rural.

a) Calculem a quantidade aproximada de mulheres com 10 anos ou mais que são economicamente ativas.

b) Quantas pessoas com 10 anos ou mais economicamente ativas moram na área urbana?

c) Representem, em um mesmo gráfico, a distribuição da população com 10 anos ou mais segundo a condição de atividade e sexo. Ver resolução no Guia do professor.

Compreensão de texto

A pandemia em declínio

Um ano depois dos primeiros casos de gripe suína, o vírus mostra que, até agora, é menos letal do que o previsto.

[...]

Pandemia

A pandemia de gripe suína não é a primeira, nem a mais assustadora, que a humanidade já enfrentou (veja o infográfico na página ao lado). Um surto de gripe transforma-se em pandemia quando um subtipo de vírus passa por uma mutação e se espalha de uma área geográfica para outras regiões do planeta, com alta porcentagem de infectados e mortos. A disseminação da gripe suína seguiu esse roteiro.

O vírus *Influenza* A (H1N1), responsável pela pandemia, é resultado da mutação de vírus causadores das gripes humana e aviária – uma variante que guarda grandes semelhanças com uma cepa identificada em porcos criados em fazendas da América do Norte, em 1998. Daí o nome popular da doença – gripe suína.

[...]

Mortalidade e letalidade

As autoridades internacionais não têm certeza da taxa de letalidade do vírus A (H1N1) – seria necessário ter notificado todos os casos da gripe. Como a maior parte dos países só informou os casos mais sérios, a OMS mantém apenas o registro do número de mortes que tem a gripe suína como causa comprovada. Até meados de fevereiro [de 2010], eram cerca de 16 mil pessoas no mundo. Estudos epidemiológicos recentes mostram que a gripe suína mata menos que a gripe comum – 0,2 morte a cada mil infectados para a gripe A (H1N1), contra uma morte a cada mil, para a sazonal.

No Brasil, o Ministério da Saúde exige que sejam notificados todos os casos de síndrome respiratória aguda grave (SRAG), quadro caracterizado por febre, tosse e falta de ar, que ocorre quando a pessoa sofre de uma gripe grave. Entre abril e novembro de 2009, do total de 30.055 casos notificados de SRAG, mais de 90% foram ocasionados pela gripe suína, ou seja, 27.850. O Ministério registrou, no período, 1.632 mortes causadas pelo H1N1, a maioria na Região Sudeste. A taxa de mortalidade média no país para a gripe suína, em 2009, foi de 0,85 por 100 mil habitantes. Em relação ao total de pacientes contaminados com o vírus, a taxa de mortalidade foi de 5,8% – valor que se encontra na faixa estimada pela OMS entre pessoas hospitalizadas, de 2% a 9%.

Fonte: *Guia do estudante*: atualidades vestibular + Enem. 1º semestre 2010. São Paulo: Abril, 2010.

MIKE CLARKE/AFP

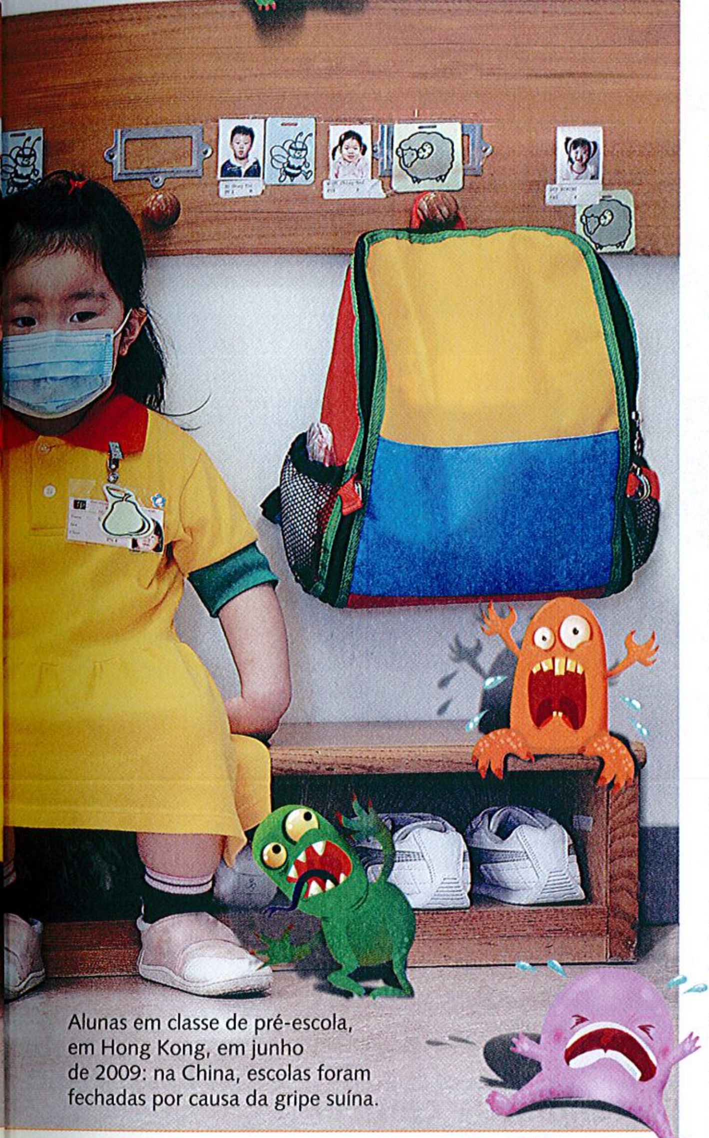
Atividades Registre as respostas em seu caderno

1. De acordo com o texto, um surto de gripe torna-se uma pandemia quando um tipo de bactéria se espalha por várias regiões do planeta?
   Não, a gripe não é causada por bactéria.
2. Por que a gripe causada pelo vírus *Influenza* A (H1N1) tem o nome popular de gripe suína?
3. Pesquisem sobre o tema e respondam:
   - **a)** O vírus *Influenza* A (H1N1) é transmitido pela ingestão de carne de porco?
   - **b)** Em que período do ano há mais facilidade para a ocorrência de epidemias de gripe?
     No inverno, quando, geralmente, as pessoas se agrupam em ambientes fechados.
4. Até meados de fevereiro de 2010, foram registradas 16 mil mortes no mundo pela gripe suína. Se a taxa de mortalidade era 0,2 a cada mil infectados, quantos foram infectados até então?
   80.000.000 pessoas

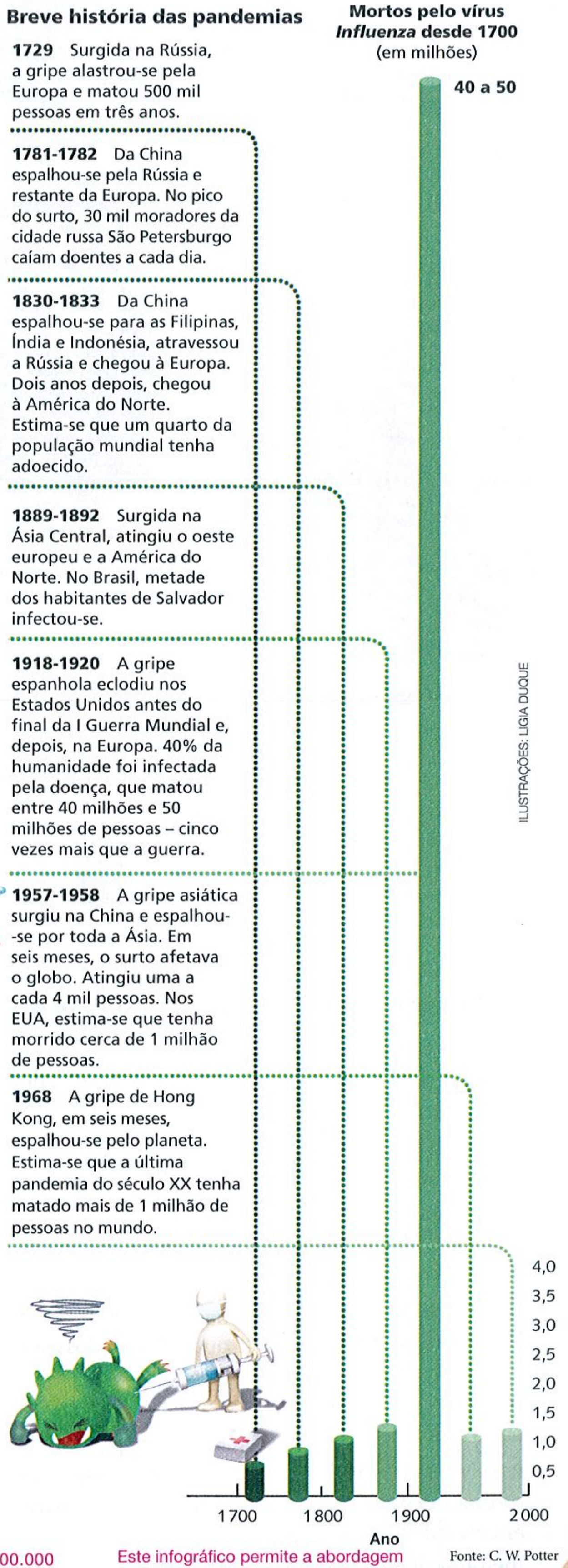
2. Porque uma cepa identificada em porcos da América do Norte tem grandes semelhanças com esse vírus.

3. a) Não, do mesmo modo que ocorre com o vírus da gripe, a transmissão se dá por via aérea, por partículas de saliva expelidas na tosse e no espirro de pessoas contaminadas.

Explicar que os casos de gripe, ou *influenza*, são anteriores ao século XVIII. Pela quantidade de mortos, os dados do século XVIII foram tomados como parâmetro neste gráfico.



Alunas em classe de pré-escola, em Hong Kong, em junho de 2009: na China, escolas foram fechadas por causa da gripe suína.



Breve história das pandemias

1729 Surgida na Rússia, a gripe alastrou-se pela Europa e matou 500 mil pessoas em três anos.

1781-1782 Da China espalhou-se pela Rússia e restante da Europa. No pico do surto, 30 mil moradores da cidade russa São Petersburgo caíam doentes a cada dia.

1830-1833 Da China espalhou-se para as Filipinas, Índia e Indonésia, atravessou a Rússia e chegou à Europa. Dois anos depois, chegou à América do Norte. Estima-se que um quarto da população mundial tenha adoecido.

1889-1892 Surgida na Ásia Central, atingiu o oeste europeu e a América do Norte. No Brasil, metade dos habitantes de Salvador infectou-se.

1918-1920 A gripe espanhola eclodiu nos Estados Unidos antes do final da I Guerra Mundial e, depois, na Europa. 40% da humanidade foi infectada pela doença, que matou entre 40 milhões e 50 milhões de pessoas – cinco vezes mais que a guerra.

1957-1958 A gripe asiática surgiu na China e espalhou-se por toda a Ásia. Em seis meses, o surto afetava o globo. Atingiu uma a cada 4 mil pessoas. Nos EUA, estima-se que tenha morrido cerca de 1 milhão de pessoas.

1968 A gripe de Hong Kong, em seis meses, espalhou-se pelo planeta. Estima-se que a última pandemia do século XX tenha matado mais de 1 milhão de pessoas no mundo.

Fonte: C. W. Potter

ILUSTRAÇÕES: LIGIA DUQUE

Este infográfico permite a abordagem interdisciplinar com Biologia.

5. a) Sim, são compatíveis, pois: 27.850 ÷ 30.055 ≃ 0,9266 = 92,66%

5. Verifiquem se os dados sobre a gripe A, entre abril e novembro de 2009, são compatíveis, isto é, se, de fato:

a) Dos 30.055 casos notificados, mais de 90% dos casos de SRAG foram ocasionados pela gripe suína.

b) A taxa de mortalidade nesse período foi de 5,8%.

Sim, são compatíveis, pois: 1.632 ÷ 27.850 ≃ 5,86%

6. Com uma régua, meçam no gráfico as alturas das colunas referentes às gripes de 1957-1958 e de 1918-1920. Para a gripe espanhola, considerem o número de mortos igual à média aritmética de 40 e 50 milhões de pessoas.

a) As medidas obtidas no gráfico são proporcionais aos valores que elas representam?

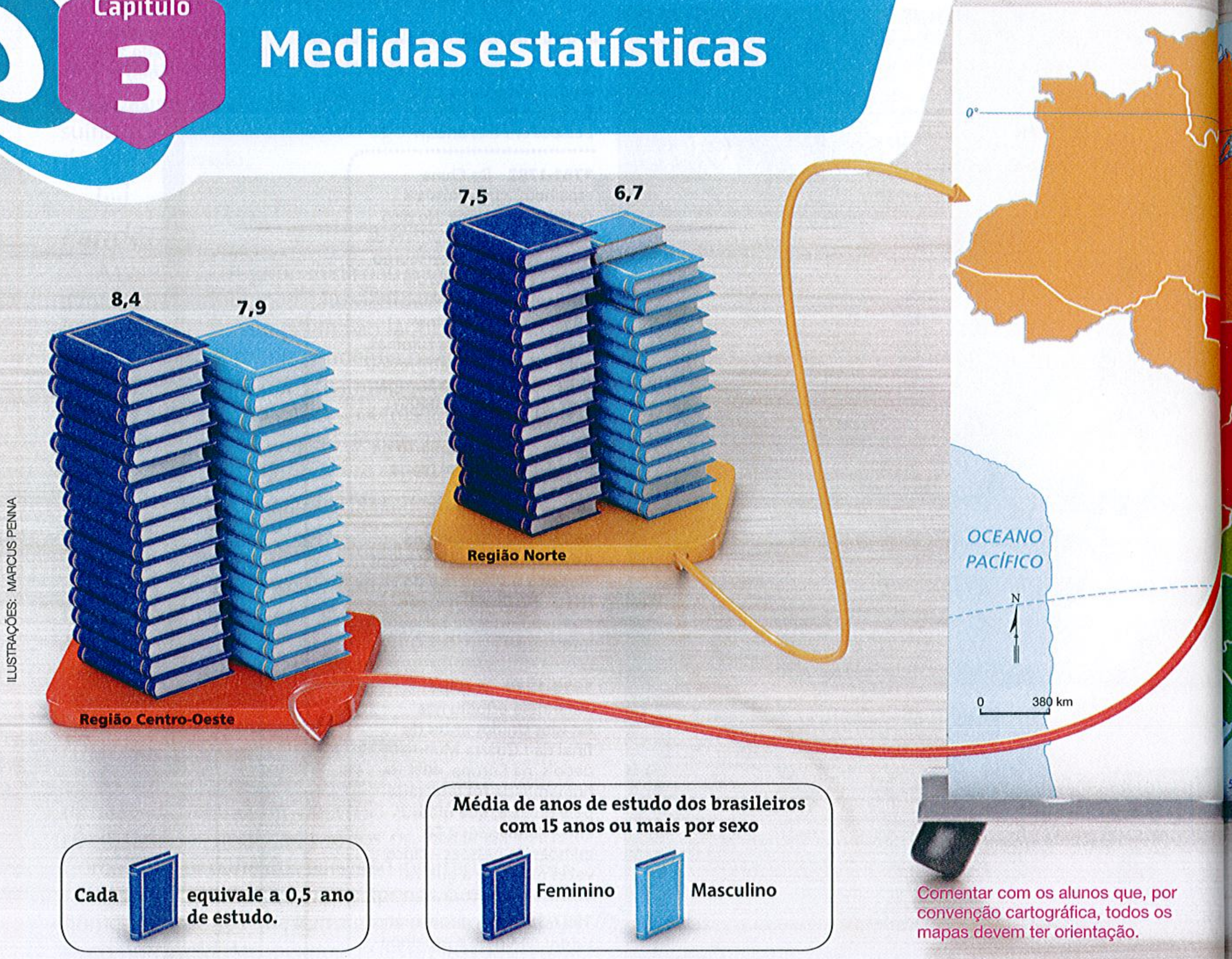
b) Caso não sejam proporcionais, mantendo a medida da coluna da gripe asiática, quantos centímetros deveria ter a altura da coluna relativa à gripe espanhola para que houvesse a proporcionalidade?

Mantendo a medida da coluna da gripe asiática, para haver proporcionalidade, a coluna referente à gripe espanhola deveria ter 40,5 cm.

6. a) O gráfico não contempla a proporcionalidade, pois $\frac{0,9 \text{ cm}}{20,6 \text{ cm}} \neq \frac{1.000.000}{45.000.000}$.

Capítulo 3

Medidas estatísticas



Comentar com os alunos que, por convenção cartográfica, todos os mapas devem ter orientação.

Objetivos do capítulo

- Calcular e interpretar média, moda e mediana de uma distribuição.
- Resolver situações-problema que envolvam essas medidas de tendência central.
- Calcular e interpretar desvio médio, variância e desvio padrão de um conjunto de valores observados.
- Resolver situações-problema que envolvam essas medidas de dispersão.

1 Medidas de tendência central

Para fazer uma pesquisa estatística, é preciso coletar e organizar dados de uma população ou de uma amostra significativa do tema analisado. Como, em geral, é obtido uma grande quantidade de dados, a apresentação do resultado da pesquisa exige a escolha de uma **medida** que resuma todos os dados levantados.

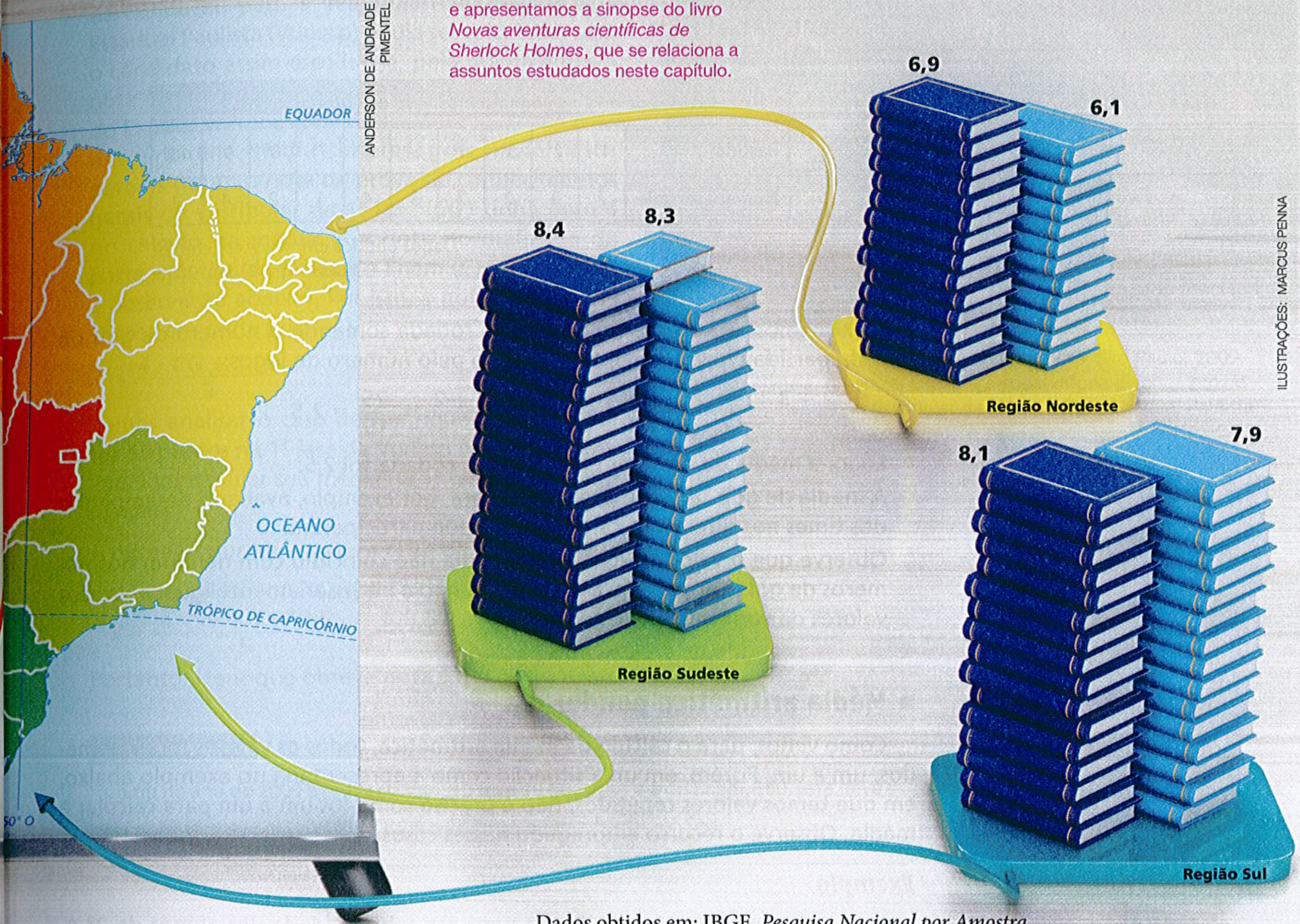
No infográfico acima, por exemplo, temos a média de anos de estudo dos brasileiros com 15 anos de idade ou mais segundo o sexo.

Apesar de ser a mais usual, a média nem sempre é a medida que melhor caracteriza um conjunto de dados. Outras medidas são empregadas para representar dados (medidas de tendência central) e, além delas, algumas medidas indicam quanto os dados estão dispersos em relação a essa medida representativa (medidas de dispersão).

As medidas estatísticas que descrevem a tendência que os dados têm de agrupamento em torno de certos valores recebem o nome de **medidas de tendência central**.

Neste capítulo, vamos estudar três dessas medidas: média, moda e mediana.

Na página 208, indicamos a leitura e apresentamos a sinopse do livro *Novas aventuras científicas de Sherlock Holmes*, que se relaciona a assuntos estudados neste capítulo.



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

ILUSTRAÇÕES: MARCUS PENNA

Dados obtidos em: IBGE. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios*, 2011. Disponível em: www.ibge.gov.br Acesso em: 18 dez. 2012.

1.1 Média aritmética

Das três medidas de tendência central que estudaremos, a média aritmética, chamada simplesmente de média, é a mais conhecida e utilizada e pode ser facilmente calculada e interpretada:

Média aritmética é o quociente entre a soma dos valores observados e o número de observações.

Indicando a média por $\bar{x}$, temos:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

sendo $x_1, x_2 \ldots, x_n$ os valores que a variável assume e n a quantidade de valores no conjunto de dados.

Observação

A letra grega maiúscula Σ (sigma) é usada para indicar uma soma.

A indicação $\sum_{i=1}^{n} x_i$ significa o **somatório** dos valores x_i para i variando de 1 até n.

Exemplo

Sabe-se que, na trigésima sexta rodada do Campeonato Brasileiro de Futebol de 2012, foram realizados 10 jogos, cuja quantidade de gols por partida está apresentada na tabela:

36ª rodada do Campeonato Brasileiro de Futebol de 2012										
Partida	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
Número de gols	2	3	2	2	3	4	1	2	4	2

Dados obtidos em: www.cbf.com.br
Acesso em: 21 jan. 2013.

Vamos calcular a média de gols dessa rodada somando o número de gols de cada partida e dividindo o total obtido pelo número de jogos:

$$\bar{x} = \frac{2 + 3 + 2 + 2 + 3 + 4 + 1 + 2 + 4 + 2}{10} = \frac{25}{10} = 2{,}5$$

Logo, a média de gols por partida nessa rodada foi 2,5.

A média de gols serve de parâmetro para, por exemplo, avaliar o desempenho dos times nos diferentes campeonatos que participaram.

Observe que o valor obtido para a média não coincidiu com nenhum dos números de gols por partida, pois a média não é necessariamente igual a um dos valores da variável.

Média aritmética ponderada

Como vimos, para o cálculo da média aritmética, todos os valores foram somados, um a um. Porém, em uma situação como a apresentada no exemplo abaixo, em que temos valores repetidos, não é preciso somá-los um a um para calcular a média. Observe o recurso empregado nesses casos.

Exemplo

Na escola Aprender, foi feita uma pesquisa sobre a idade dos alunos do 2º A, que apresentou os seguintes resultados:

Idade dos alunos do 2º A			
Idade	15	16	17
Número de alunos	18	20	2

Fonte: Escola Aprender.

Como os valores se repetem (uma mesma idade ocorre mais de uma vez), é possível calcular a média das idades assim:

$$\bar{x} = \frac{18 \cdot 15 + 20 \cdot 16 + 2 \cdot 17}{40} = \frac{624}{40} = 15{,}6$$

O número de vezes que um valor se repete recebe o nome de **peso**, e a média aritmética calculada com pesos é chamada **média aritmética ponderada**.

Reflita

A soma dos pesos pode ser igual a zero? Justifique.

Não, pois a soma dos números de vezes que o valor se repete é sempre positiva.

Assim, $\bar{x} = \dfrac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$, sendo x_i os valores da variável e p_i os respectivos pesos.

Observe que os pesos correspondem às frequências absolutas (f_i) de cada valor.

O peso também pode representar a importância que cada valor tem na composição da média ponderada. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo

No ano de 2009, a nota final da 1ª fase do vestibular da Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista (Vunesp) podia ser calculada, caso o candidato assim escolhesse, pela média entre a nota obtida na 1ª fase e a nota da parte objetiva do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Mas não era uma média simples, pois havia pesos para as notas: a nota da prova de conhecimentos gerais do vestibular da 1ª fase (CG) tinha peso 4 no cálculo da média, e a nota normalizada da parte objetiva da prova do Enem (E), peso 1 (leia a observação abaixo). Por isso, a nota final ($\bar{x}$) da 1ª fase era dada por:

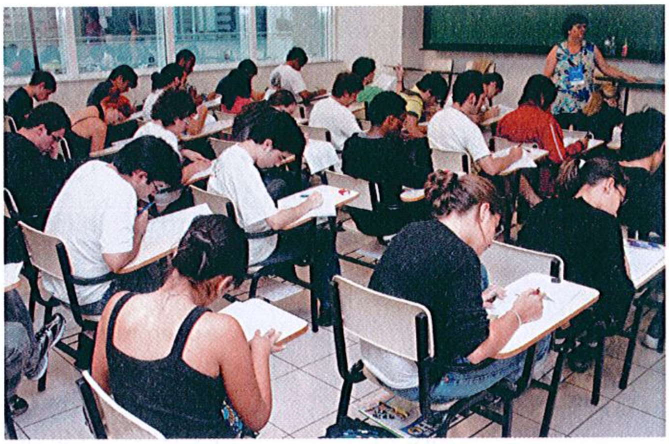
$$\bar{x} = \frac{4 \cdot CG + 1 \cdot E}{5}$$

Vamos analisar o caso de Henrique. Em 2012 ele fez 59 pontos na 1ª fase da Vunesp e 145 no Enem. Podemos calcular sua média na 1ª fase da seguinte maneira:

- primeiro normalizamos a nota do Enem: $\frac{145}{2} \simeq 72{,}5$
- depois calculamos a média ($\bar{x}$):

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot 59 + 1 \cdot 72{,}5}{5} = \frac{308{,}5}{5} = 61{,}7$$

Portanto, Henrique obteve nota 61,7.


VAGNER CAMPOS/FUTURA PRESS

Alunos fazendo a prova do vestibular da Vunesp, São Paulo, 2009. A Vunesp planeja, organiza, executa e supervisiona diversas provas e concursos, inclusive o vestibular da Universidade Estadual Paulista (Unesp).

Observação

Como no ano de 2009 a prova da Vunesp teve 90 questões e a do Enem, 180, esta deve ser normalizada para o cálculo da média deste modo: $\frac{E \cdot 90}{180} = \frac{E}{2}$

1.2 Moda

A segunda medida de tendência central que estudaremos é a moda.

Ela é usada quando o objetivo é, por exemplo, identificar a preferência em uma situação, definir a faixa etária mais frequente de pessoas em um local ou saber a numeração de roupas mais vendida de uma marca.

Moda é(são) o(s) valor(es) que aparece(m) com maior frequência no conjunto de valores observados.

Vamos indicar a moda por ***Mo***.

Exemplos

a) O conjunto de valores 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3 e 4 tem moda 1, pois é o valor que aparece em maior número de vezes.

b) Em uma pesquisa com 20 pessoas sobre o seu tipo sanguíneo, os resultados foram:

O, A, O, AB, B, A, O, AB, B, B, AB, O, B, AB, O, A, A, O, O, A

Nessa pesquisa, 7 pessoas têm tipo sanguíneo O, 5 pessoas tipo A, 4 pessoas tipo AB e 4 pessoas tipo B. Portanto, o tipo sanguíneo O é a moda dessa amostra, pois tem maior frequência.

Quando todos os valores apresentam a mesma frequência, **não há moda** na distribuição considerada. Existem também conjuntos de dados com duas modas (**bimodais**) ou mais modas (**multimodais**).

Observação

Embora a palavra **moda** tenha, no dicionário, uma acepção para uso cotidiano — maneira, gênero, estilo prevalente, isto é, que aparece em maior quantidade — com alguma próximidade do seu significado em Matemática, não devemos confundir esses conceitos.

Mais exemplos

- O conjunto de valores 1, 2, 3, 4, 5 e 6 não apresenta moda.
- O conjunto de valores 1, 2, 2, 3, 4, 4 e 5 é bimodal, pois apresenta duas modas: 2 e 4.

1.3 Mediana

A terceira medida de tendência central que estudaremos é a mediana.

Mediana de um grupo de valores previamente ordenados, de modo crescente ou decrescente, é o valor que divide esse grupo em duas partes com o mesmo número de termos.

- Quando temos um grupo de valores em **número ímpar de dados**, a mediana é o termo central da distribuição. Nesse caso, ela pertence ao grupo observado.
- Quando temos um grupo de valores em **número par de dados**, a mediana é a média aritmética dos termos centrais. Nesse caso, a mediana pode não pertencer ao grupo de valores observado.

A mediana, que indicaremos por ***Me***, é uma medida usada quando os valores da amostra são discrepantes.

Observação

Sendo n o número de termos da distribuição, temos:

- se n é ímpar, a posição do termo central é dada por: $\left(\frac{n+1}{2}\right)$
- se n é par, as posições dos dois termos centrais são dadas por: $\frac{n}{2}$ e $\left(\frac{n}{2}+1\right)$

Exemplo

A tabela abaixo registra os valores pagos em contas de água, no primeiro semestre do ano, pela pousada Descanse Bem:

Valores pagos em contas de água

Mês	Valor (em real)
janeiro	562,33
fevereiro	350,12
março	56,17
abril	42,50
maio	40,43
junho	46,45

Fonte: Pousada Descanse Bem.

Para calcular a média do valor pago no primeiro semestre, fazemos:

$$\bar{x} = \frac{562{,}33 + 350{,}12 + 56{,}17 + 42{,}50 + 40{,}43 + 46{,}45}{6} = 183{,}00$$

Portanto, em média, o valor da conta de água dessa pousada foi R$ 183,00.

Repare que essa medida não é fiel à realidade, uma vez que, de seis contas, quatro apresentam valor muito menor que a média encontrada. Isso ocorre porque, nos meses de janeiro e fevereiro, o consumo de água na pousada foi muito maior que o dos meses de março a junho.

Em situações como essa, em que existem valores discrepantes, a mediana é melhor que a média para representar o perfil da amostra. Acompanhe o cálculo a seguir.

Primeiro organizamos os dados em ordem crescente:

40,43 42,50 46,45 56,17 350,12 562,33

Depois tomamos o valor que fica "no meio". Como, no caso, temos um número par de dados, precisamos calcular a média aritmética dos dois termos centrais:

$$Me = \frac{46{,}45 + 56{,}17}{2} = 51{,}31$$

A mediana, então, representa os valores da conta de água dessa pousada no primeiro semestre do ano e traduz melhor a realidade do que a média.

Note que metade dos valores da amostra são menores que a mediana, e metade, maiores.

Exercícios resolvidos

R1. Os salários de 18 funcionários do departamento de contabilidade de uma empresa do ramo financeiro estão aqui relacionados (em real):

890 890 890 930 930 930
1.070 1.070 1.070 1.070 1.070 1.070
1.979 1.979 2.240 2.240 2.720 2.720

a) Qual é o salário mais frequente, isto é, a moda dos salários desse departamento?

b) Qual é o salário médio dos funcionários?

c) Qual é o salário mediano dos funcionários?

▸ ***Resolução***

a) A moda dos salários é R$ 1.070,00, já que 1.070 é o valor que mais se repete na relação de salários apresentada.

b) Para determinar o salário médio, podemos calcular a média ponderada dos salários:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 890 + 3 \cdot 930 + 6 \cdot 1.070 + 2 \cdot 1.979 + 2 \cdot 2.240 + 2 \cdot 2.270}{18} =$$

$$= \frac{24.858}{18} = 1.381$$

Logo, o salário médio desses funcionários é R$ 1.381,00.

c) Temos um número par de valores. Então precisamos encontrar os dois termos centrais da sequência crescente, isto é, o 9º e o 10º termos, e calcular a média entre eles. Como esses termos são iguais, a média é 1.070. Portanto, o salário mediano é R$ 1.070,00.

R2. Na primeira quinzena do mês, um aluno obteve 4,5 de nota média entre dois trabalhos. Na segunda quinzena, conseguiu nota 7 em uma prova e nota 9 em um trabalho. Considerando todas as notas, qual será a média mensal desse aluno se todos os trabalhos e a prova têm o mesmo peso?

▸ ***Resolução***

Chamando os dois primeiros trabalhos de t_1 e t_2, podemos escrever:

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = 4{,}5 \Rightarrow t_1 + t_2 = 9$$

Chamando a nota da prova de p e a do terceiro trabalho de t_3, teremos como média mensal:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + p + t_3}{4} = \frac{9 + 7 + 9}{4} = 6{,}25$$

Portanto, a nota mensal desse aluno será 6,25.

2. c) Espera-se que o aluno identifique a mediana como a medida mais representativa nessa situação, pois ela não considera os valores muito baixos da conta, diferentemente da média.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Avaliar a conveniência de pedir aos alunos que, nos itens **a**, **b**, **c**, **f**, **g** e **h**, do exercício **1**, estimem os resultados efetuando os cálculos mentalmente, com aproximações, se julgarem necessário. Depois efetuem seus cálculos no caderno e comparem os novos resultados com suas estimativas.

Ver resolução no Guia do professor.

1. Determine a média, a mediana e a moda para cada um dos conjuntos de dados abaixo.

a) 3, 5, 2, 3, 6, 7, 4, 8, 2, 3, 4, 5

b) 12, 13, 14, 1, 2, 3, 12, 11, 11, 11

c) 51, 4, 34, 78, 65, 90, 106

d) 11; 8; 4; 3; 2; 25; 25,2; 45,7; 68,9

e) 95, 45, 32, 67, 89, 34, 12, 97, 45

f) 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5

g) 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7

h) −10, −6, −6, −4, −1, −3

2. A seguir, estão os valores mensais referentes ao consumo de energia elétrica (em kWh) medidos em uma casa, durante 12 meses.

50 267 279 262 226 298
294 272 297 257 244 50

a) Qual foi o consumo médio do período? 233 kWh

b) E o consumo mediano? 264,5 kWh

c) Qual das duas medidas você acha que representa melhor o consumo de energia elétrica dessa casa?

3. b) R\$ 3.457,00

3. Estão relacionados abaixo os lucros (em real) que uma empresa obteve durante os 6 meses do primeiro semestre de certo ano.

3.270 3.649 3.381 3.541 3.258 3.533

a) Calcule o lucro médio desse período. ≃ R\$ 3.438,67

b) Qual foi o lucro mediano nesses 6 meses?

c) Observando apenas os resultados obtidos nos itens **a** e **b**, você pode determinar a moda? Justifique. Não, pois a moda não depende da mediana nem da média.

4. A seguir estão os números de acidentes de trabalho que ocorreram em uma metalúrgica nos 12 meses de certo ano.

2 1 0 3 1 1 0 0 0 1 1 1

a) Qual é a média mensal de acidentes que ocorreram nessa metalúrgica nesse ano? ≃ 0,917

b) Qual é o número mensal de acidentes mais frequente no período? 1

c) Qual é o número mediano de acidentes? 1

5. (FGV) Seja f uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \ 1 \leqslant x < 5 \\ -x + 12, \ 5 \leqslant x \leqslant 12 \end{cases}$$

Sabendo-se que a função f determina o número de vezes que um equipamento foi utilizado em cada um dos 12 meses de um ano, é correto afirmar que a mediana (estatística) dos 12 registros é igual a: alternativa b

a) 3
b) 3,5
c) $\frac{11}{3}$
d) 4
e) 5,5

6. Até a 8ª rodada de um campeonato de futebol de 2014, a média, em 80 jogos, foi de 2,525 gols por jogo. A média do campeonato de 2013 foi de 2,9 gols por jogo. Quantos gols deveriam ter sido marcados, em 10 partidas, para que, na 9ª rodada, fosse atingida a média de gols do campeonato de 2013? 59 gols

1.4 Medidas de tendência central para dados agrupados

Acompanhe algumas situações de cálculo das medidas de tendência central (média, moda e mediana) quando os dados são apresentados agrupados em tabelas de distribuição de frequências ou gráficos.

■ Média

Quando os dados são apresentados sem intervalos ou classes, a média pode ser calculada como uma média aritmética ponderada, em que as frequências são os pesos.

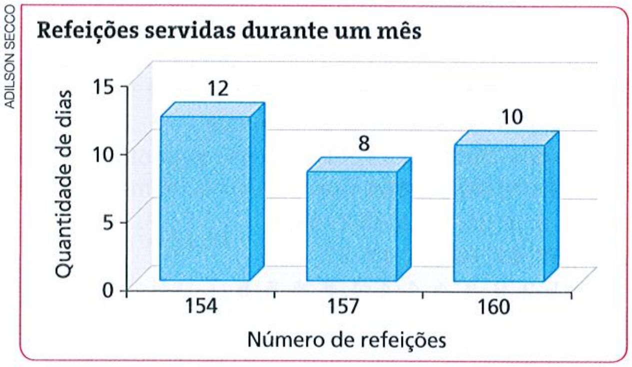
Exemplo

Durante um mês, foi computado o número de refeições servidas por dia no restaurante Sabor.

Refeições servidas durante um mês

Número de refeições servidas por dia	Quantidade de dias (f_i)
154	12
157	8
160	10
	$\Sigma f_i = 30$

Fonte: Restaurante Sabor.



Fonte: Restaurante Sabor.

Observando a distribuição de frequências ou o gráfico da página anterior, podemos calcular a média aritmética assim:

$$\bar{x} = \frac{12 \cdot 154 + 8 \cdot 157 + 10 \cdot 160}{30} = \frac{4.704}{30} = 156,8$$

Portanto, a média de refeições servidas por dia naquele mês foi 156,8.

Quando os dados são apresentados em intervalos ou classes, para calcular a média, consideramos que a frequência de cada classe está concentrada no ponto médio desse intervalo.

O **ponto médio** (PM_i) de uma classe é a média aritmética entre os valores extremos da classe.

Por exemplo, o ponto médio da classe [2, 6[é: $PM = \frac{2 + 6}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Para o cálculo de PM, admitimos que os extremos do intervalo real [2, 6[sejam 2 e 6, apesar de o intervalo ser aberto em 6.

Para calcular a média, somamos os produtos de cada frequência (f_i) pelo ponto médio (PM_i) correspondente e dividimos esse total pela soma das frequências:

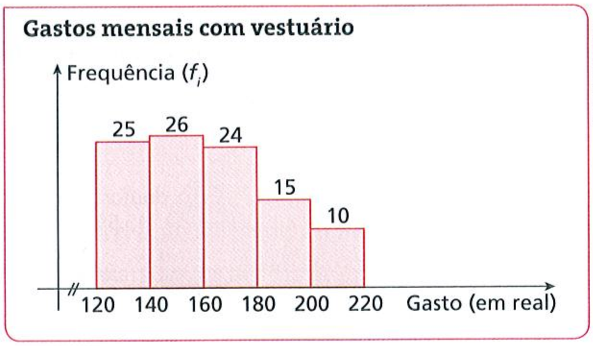
$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot PM_1 + f_2 \cdot PM_2 + \ldots + f_n \cdot PM_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

Exemplo

Considere os gastos mensais (em real) com vestuário extraídos de uma pesquisa feita com 100 pessoas sobre seus orçamentos familiares:

Gasto mensal com vestuário			
Gasto mensal (em real)	f_i	PM_i	$f_i \cdot PM_i$
120 ⊢ 140	25	130	3.250
140 ⊢ 160	26	150	3.900
160 ⊢ 180	24	170	4.080
180 ⊢ 200	15	190	2.850
200 ⊢ 220	10	210	2.100
	$\Sigma f_i = 100$		$\Sigma(f_i \cdot PM_i) = 16.180$

Dados fictícios.



Dados fictícios.

Observando a distribuição de frequências ou o histograma acima, podemos obter a média calculando o quociente entre a soma dos produtos de cada frequência pelo ponto médio correspondente e a soma das frequências:

$$\bar{x} = \frac{16.180}{100} = 161,80$$

Portanto, a média mensal de gastos com vestuário das pessoas pesquisadas é R$ 161,80.

Reflita

É possível localizar no gráfico a média aritmética dos valores agrupados por classes? Justifique.

Ver resolução no Guia do professor.

Moda

Quando os dados são apresentados sem intervalos ou classes, é muito simples calcular a moda: basta identificar o valor que aparece com maior frequência.

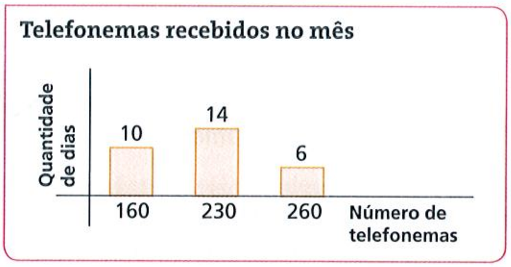
Exemplos

a) Considere o número de telefonemas que uma central de atendimento ao cliente recebeu nos dias de certo mês:

Telefonemas recebidos no mês

Número de telefonemas	Quantidade de dias (f_i)
160	10
230	14
260	6

Fonte: Central de atendimento ao cliente.



ADILSON SECCO

Fonte: Central de atendimento ao cliente.

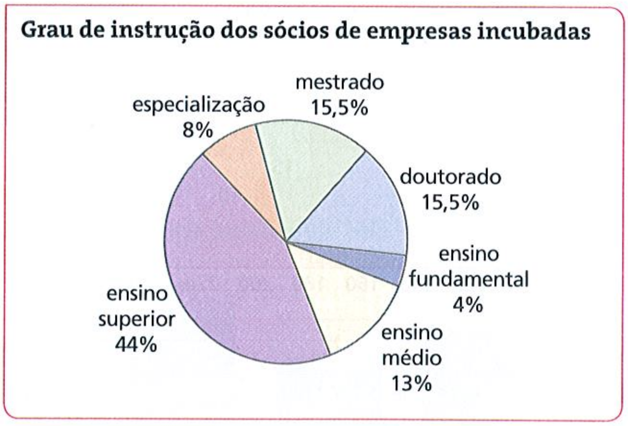
Observando a distribuição de frequências ou o gráfico de colunas acima, podemos determinar o número modal de telefonemas.

Como a maior frequência é 14, temos $Mo = 230$.

Logo, 230 é o número modal de telefonemas.

b) Incubadoras de empresas são aquelas que mantêm empreendimentos em empresas ditas incubadas até que elas se desenvolvam e atinjam condições de sobreviver e crescer sozinhas.

Observe o gráfico a seguir, que apresenta o grau de instrução dos sócios de algumas empresas incubadas.



ADILSON SECCO

Dados fictícios.

Com base nesse gráfico de setores, podemos identificar o grau de instrução modal. Para isso, basta verificar o grau de instrução que corresponde ao maior setor, que é aquele representado pela maior porcentagem (44%). Assim, o grau de instrução modal é o ensino superior.

Explore

Junto com quatro colegas, pesquise mais sobre incubadoras de empresas e empreendedorismo.

Escolham um ramo de atividade e elaborem um projeto de microempresa. Nesse projeto, relacionem as necessidades dessa empresa que uma incubadora poderia suprir. Estimem um prazo para o qual ela possa ganhar autonomia e deixar a incubadora.

Construam cartazes com textos, fotos, gráficos, organogramas etc. Produzam um vídeo com entrevistas de profissionais afins com o ramo empresarial que escolheram e, junto com o professor, organizem uma mostra para divulgação.

Para calcular a moda quando os dados são apresentados em intervalos ou classes de mesma amplitude, devemos primeiro identificar o intervalo que apresenta a maior frequência, denominado **classe modal**. Depois, calculamos o ponto médio da classe modal, que será a moda da distribuição.

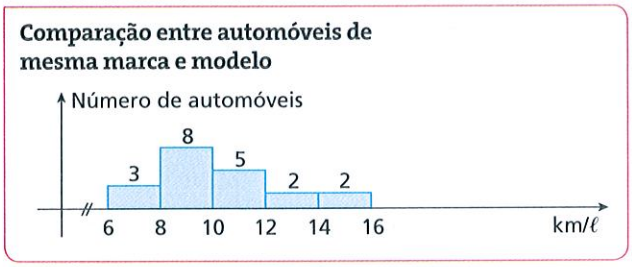
Exemplo

Considere os dados a seguir sobre a quantidade de quilômetros rodados por litro de combustível, em certo período, de 20 automóveis de mesma marca e modelo.

Comparação entre automóveis de mesma marca e modelo

Quilometragem por litro (km/ℓ)	Número de automóveis (f_i)
[6, 8[	3
[8, 10[	8
[10, 12[	5
[12, 14[	2
[14, 16[	2

Dados fictícios.


Comparação entre automóveis de mesma marca e modelo

Dados fictícios.

Observando a distribuição de frequências ou o histograma acima, vamos calcular a quilometragem modal por litro de combustível.

Note que o intervalo de maior frequência (a classe modal) é [8, 10[.

Com essa informação, é possível calcular o ponto médio da classe:

$$PM_2 = \frac{8 + 10}{2} = \frac{18}{2} = 9 \Rightarrow Mo = 9$$

Portanto, a quilometragem modal é igual a 9 km/ℓ.

Reflita

O que significa a quilometragem modal ser 9 km/ℓ?

Significa que a maioria dos carros dessa amostra rodam em média 9 km/ℓ.

Exercício resolvido

R3. As mensalidades (em real) de 20 universidades, referentes ao curso de Pedagogia, estão agrupadas em intervalos segundo a tabela:

a) Qual é o valor médio de uma mensalidade para o referido curso?

b) Qual é o valor modal das mensalidades desse curso?

c) Construir o histograma referente a esses dados e indicar o valor médio de uma mensalidade e o valor modal das mensalidades desse curso.

Mensalidades do curso de Pedagogia

Mensalidade (R$)	Número de universidades (f_i)
[400, 500[	8
[500, 600[	7
[600, 700[	2
[700, 800[	1
[800, 900[	1
[900, 1.000[	1

Dados fictícios.

▸ ***Resolução***

a) Primeiro precisamos calcular o ponto médio de cada intervalo:

Do intervalo [400, 500[: $PM_1 = \frac{400 + 500}{2} = 450$

Fazendo os cálculos dos pontos médios dos outros intervalos, obtemos: $PM_2 = 550$; $PM_3 = 650$; $PM_4 = 750$; $PM_5 = 850$ e $PM_6 = 950$.

O valor médio da mensalidade é calculado assim:

$$\bar{x} = \frac{8 \cdot 450 + 7 \cdot 550 + 2 \cdot 650 + 1 \cdot 750 + 1 \cdot 850 + 1 \cdot 950}{8 + 7 + 2 + 1 + 1 + 1} =$$

$$= \frac{11.300}{20} = 565$$

Logo, o valor médio da mensalidade do curso de Pedagogia é R$ 565,00.

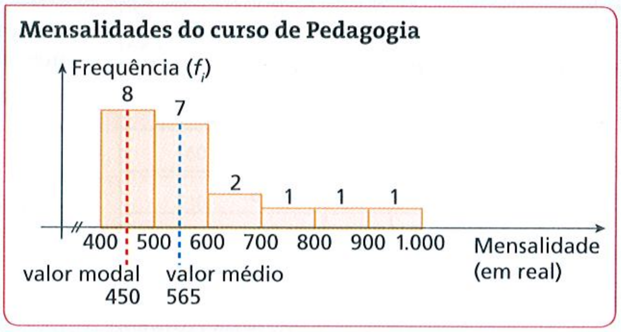
b) Note que os valores estão agrupados em intervalos. Por isso, devemos encontrar primeiro a classe modal, ou seja, a classe com maior frequência.

Observando a tabela, notamos que a maior frequência é 8 e corresponde à classe [400, 500[, que é a classe modal.

No item **a)** vimos que o ponto médio dessa classe é 450.

Portanto, o valor modal das mensalidades desse curso é R$ 450,00.

c)



Dados fictícios.

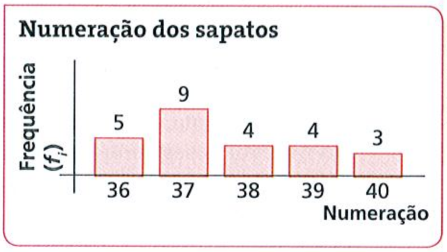
Mediana

Quando os dados são apresentados sem intervalos ou classes, para determinar a mediana procedemos de modo semelhante ao do cálculo apresentado no item **1.3**.

Exemplo

Observe a distribuição de frequências dada a seguir, referente a numeração dos sapatos usados por 25 pessoas.

Numeração dos sapatos	f_i	F_i
36	5	5
37	9	$14 = 5 + 9$
38	4	$18 = 5 + 9 + 4$
39	4	$22 = 5 + 9 + 4 + 4$
40	3	$25 = 5 + 9 + 4 + 4 + 3$



Dados fictícios.

Note que, na tabela, os dados já estão ordenados e que o número total é 25 (número ímpar). Assim, para determinar a numeração mediana dos sapatos dessas pessoas, basta encontrar o termo central – nesse caso, o valor que ocupa a 13ª posição $\left(\frac{25 + 1}{2}\right)$.

Como os dados estão em ordem crescente, o 13º termo está entre os 9 dados referentes a sapatos de numeração 37.

Então, a numeração mediana dos sapatos é 37.

Quando os dados apresentados estão agrupados em classes, devemos primeiro encontrar a classe a que pertence a mediana, chamada de **classe mediana**.

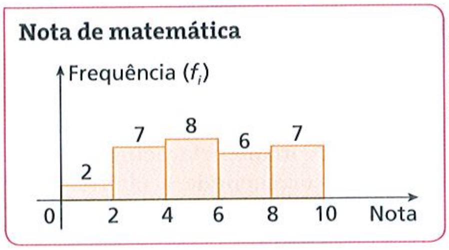
A classe mediana é aquela que apresenta a frequência acumulada imediatamente maior que o quociente $\frac{\Sigma f_i}{2}$. Assim, uma vez localizada a classe mediana, encontramos o valor mediano Me por meio da igualdade:

$$\frac{\text{diferença entre os extremos da classe mediana}}{\text{frequência da classe mediana}} = \frac{\text{diferença entre } Me \text{ e o extremo inferior da classe mediana}}{\text{diferença entre } \frac{\Sigma f_i}{2} \text{ e a frequência acumulada da classe anterior à classe mediana}}$$

Exemplo

Considere a seguinte distribuição de frequências:

Nota de Matemática	f_i	F_i
[0, 2[	2	2
[2, 4[	7	9
[4, 6[	8	17
[6, 8[	6	23
[8, 10[	7	30
	$\Sigma f_i = 30$	


Nota de matemática

ADILSON SECCO

Dados fictícios.

Vamos encontrar a nota mediana dessa turma:

$$\frac{\Sigma f_i}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

A frequência acumulada imediatamente maior que 15 é 17 e corresponde à classe mediana: [4, 6[

Agora, podemos obter o valor da mediana resolvendo a equação:

$$\frac{6-4}{8} = \frac{Me-4}{15-9} \Rightarrow Me = 5{,}5$$

Portanto, a nota mediana dessa turma é 5,5.

Exercício resolvido

R4. No último vestibular para o curso de Jornalismo de uma faculdade, a prova contava com 98 questões objetivas. Compareceram 1.200 candidatos ao exame, e os resultados encontram-se na tabela de distribuição de frequências abaixo.

Resultado dos candidatos ao curso de Jornalismo no vestibular

Quantidade de pontos	Número de candidatos (f_i)
[0, 20[	320
[20, 40[	250
[40, 60[	412
[60, 80[	126
[80,100[	92
Total	1.200

Dados fictícios.

Calcular a média e a mediana dessa distribuição.

▸ ***Resolução***

Para facilitar os cálculos, vamos construir uma tabela:

Quantidade de pontos	Número de candidatos (f_i)	F_i	PM_i	$f_i \cdot PM_i$
[0, 20[	320	320	10	3.200
[20, 40[	250	570	30	7.500
[40, 60[	412	982	50	20.600
[60, 80[	126	1.108	70	8.820
[80, 100[	92	1.200	90	8.280
	$\Sigma f_i = 1.200$			$\Sigma(f_i \cdot PM_i) = 48.400$

Pelos dados da tabela, podemos calcular a média:

$$\bar{x} = \frac{48.400}{1.200} \simeq 40,33$$

Como os valores estão agrupados em intervalos, para calcular a mediana vamos primeiro encontrar a classe mediana. Temos:

$$\frac{\Sigma f_i}{2} = \frac{1.200}{2} = 600$$

A frequência acumulada imediatamente superior a 600 é 982 e corresponde à classe [40, 60[, que é a classe mediana. Assim:

$$\frac{60-40}{412} = \frac{Me - 40}{600 - 570} \Rightarrow Me \simeq 41,46$$

Portanto, a média e a mediana dos resultados desses candidatos são, respectivamente, cerca de 40,33 e 41,46, o que indica que os valores observados tendem a se agrupar em torno dos 40 pontos.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

7. A tabela ao lado apresenta a distribuição de frequências dos salários (em real) de 30 funcionários da empresa X.

a) Com base nesses dados, encontre a média dos salários dos funcionários. aproximadamente R$ 2.873,00

b) Qual é a moda dessa distribuição de salários? R$ 1.460,00

c) Construa o histograma referente a esses dados, indicando o valor médio de salário e o valor modal dos salários nessa empresa. Ver resolução no Guia do professor.

Distribuição de salários dos funcionários

Salário (R$)	Número de funcionários (f_i)
[260, 1.060[	5
[1.060, 1.860[	6
[1.860, 2.660[	5
[2.660, 3.460[	5
[3.460, 4.260[	3
[4.260, 5.060[	2
[5.060, 5.860[	1
[5.860, 6.660[	1
[6.660, 7.460[	1
[7.460, 8.260[	1

Fonte: Empresa X.

8. Numa corrida de Fórmula 1 foram computados os tempos (em segundo) que os pilotos gastaram na realização de um *pit stop*.

a) Calcule o tempo médio que os pilotos gastaram no *pit stop*. 9,2 s

b) Determine o tempo mediano de *pit stop*. ≃ 9,3 s

Tempo gasto na realização de um *pit stop*

Tempo (em s)	Número de pilotos (f_i)
[0, 4[	2
[4, 8[	5
[8, 12[	9
[12, 16[	3
[16, 20[	1

Dados fictícios.

9. Com o intuito de economizar água, foi feito um levantamento com 100 pessoas do condomínio Vila Rica sobre o tempo que gastam para tomar banho. Os resultados (em minuto) são:

a) Calcule o tempo médio que essas pessoas gastam para tomar um banho. 22 minutos

b) Quanto tempo a maioria das pessoas gasta para tomar banho? 35 minutos

Tempo gasto no banho

Tempo (em min)	Quantidade de pessoas
[0, 10[	20
[10, 20[	30
[20, 30[	10
[30, 40[	40

Fonte: Condomínio Vila Rica.

2 Medidas de dispersão

Observe a situação a seguir.

O instituto de meteorologia de certa cidade registrou a temperatura local (em grau Celsius) em alguns momentos ao longo de dois dias de um mês. Os resultados obtidos foram:

1º dia: 7, 8, 9, 9, 10 e 11 2º dia: 6, 7, 8, 10, 11 e 12

Note que a **temperatura média** de cada um dos dias foi **9 °C**. Podemos então perguntar: em qual desses dias a temperatura foi mais estável, ou seja, em qual desses dias a variabilidade de temperatura foi menor?

Recorrer à média não responde à questão, já que, nos dois dias, a temperatura média foi a mesma. Precisamos de medidas que permitam descrever o comportamento do grupo de valores em torno da média.

As medidas estatísticas que descrevem o comportamento de um grupo de valores em torno das medidas de tendência central recebem o nome de **medidas de dispersão** ou **de variabilidade**.

O que fazer, então, para obter a resposta à questão sobre a estabilidade de temperatura?

Para isso, vamos estudar algumas medidas de dispersão: desvio médio, variância e desvio padrão.

2.1 Desvio médio

Para analisar o grau de dispersão ou de variabilidade de um grupo de dados, podemos utilizar o desvio médio.

Para isso, primeiro calculamos os **desvios em relação à média**, chamados simplesmente de **desvios**, obtidos pela diferença entre cada valor observado e a média desses valores. Em seguida, obtemos o quociente entre a soma dos valores absolutos dessas diferenças (desvios) e o total dos valores observados.

Desvio médio é a média aritmética dos valores absolutos dos desvios.

Indicando o desvio médio por ***Dm***, temos:

$$Dm = \frac{|x_1 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Considerando as temperaturas obtidas no exemplo da abertura deste item, vamos construir duas tabelas:

1º dia ($\bar{x} = 9$)		
x_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
7	$7 - 9 = -2$	2
8	$8 - 9 = -1$	1
9	$9 - 9 = 0$	0
9	$9 - 9 = 0$	0
10	$10 - 9 = 1$	1
11	$11 - 9 = 2$	2
		$\Sigma\lvert x_i - \bar{x}\rvert = 6$

2º dia ($\bar{y} = 9$)		
y_i	$y_i - \bar{y}$	$\lvert y_i - \bar{y}\rvert$
6	$6 - 9 = -3$	3
7	$7 - 9 = -2$	2
8	$8 - 9 = -1$	1
10	$10 - 9 = 1$	1
11	$11 - 9 = 2$	2
12	$12 - 9 = 3$	3
		$\Sigma\lvert y_i - \bar{y}\rvert = 12$

Reflita

Calcule a soma dos desvios:
$(x_1 - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x})$
O que você pode concluir?

A soma indicada resulta em zero. Pode-se concluir que a soma dos desvios é sempre zero.

Calculando os desvios médios para as temperaturas de cada dia, temos:

- 1º dia: $Dm_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{6}{6} = 1$
- 2º dia: $Dm_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i - \bar{y}|}{n} = \frac{12}{6} = 2$

Portanto, houve maior dispersão (ou variabilidade) de temperatura no 2º dia (2 °C), ou seja, a temperatura foi mais estável (teve menor variabilidade) no 1º dia.

2.2 Variância e desvio padrão

Outras medidas de dispersão que podemos empregar para identificar o grau de dispersão ou de variabilidade de um conjunto de dados são a variância e o desvio padrão.

Variância é a média aritmética dos quadrados dos desvios.

Observação

Como os desvios são elevados ao quadrado para o cálculo da variância, não se consegue expressá-la na mesma unidade dos valores da variável.

Vamos indicar a variância por ***Var***. Assim:

$$Var = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Observe que, ao calcular a variância, trabalhamos com os quadrados dos desvios, o que pode gerar uma incompatibilidade em relação às unidades dos valores da variável considerada.

Para contornar esse problema, devemos obter uma medida compatível com os valores da variável, ou seja, uma medida que tenha a mesma natureza dos valores observados. Essa medida é o desvio padrão.

Desvio padrão é a raiz quadrada da variância.

Vamos indicar o desvio padrão por ***Dp***. Assim:

$$Dp = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

Ou, ainda, podemos indicar: $Dp = \sqrt{Var}$

Agora, vamos retomar a situação das temperaturas na cidade da situação anterior. Vamos calcular a variância e o desvio padrão relativos a cada dia.

1º dia		
x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
7	$7 - 9 = -2$	4
8	$8 - 9 = -1$	1
9	$9 - 9 = 0$	0
9	$9 - 9 = 0$	0
10	$10 - 9 = 1$	1
11	$11 - 9 = 2$	4
		$\Sigma(x_i - \overline{x})^2 = 10$

2º dia		
y_i	$y_i - \overline{y}$	$(y_i - \overline{y})^2$
6	$6 - 9 = -3$	9
7	$7 - 9 = -2$	4
8	$8 - 9 = -1$	1
10	$10 - 9 = 1$	1
11	$11 - 9 = 2$	4
12	$12 - 9 = 3$	9
		$\Sigma(y_i - \overline{y})^2 = 28$

Quanto menor o desvio padrão, maior é a homogeneidade do grupo, ou seja, quanto mais o desvio padrão se aproxima de zero, mais homogênea é a distribuição dos valores observados.

Reflita

Qual é a relação entre o desvio padrão e o grau de homogeneidade do grupo de valores observados?

- Para o 1º dia:

$$Var_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{10}{6} \simeq 1{,}67$$

$$Dp_1 = \sqrt{Var_1} = \sqrt{1{,}67} \simeq 1{,}29$$

- Para o 2º dia:

$$Var_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n} = \frac{28}{6} \simeq 4{,}67$$

$$Dp_2 = \sqrt{Var_2} = \sqrt{4{,}67} \simeq 2{,}16$$

Com isso, podemos concluir que a maior dispersão (ou variabilidade) ocorreu no 2º dia, ou seja, o 2º dia foi o que apresentou as temperaturas menos homogêneas. Portanto, caracteriza um grupo menos regular.

Observação

Para comparar a dispersão de dois grupos de dados, podemos utilizar qualquer uma das medidas: desvio médio, variância ou desvio padrão. Note que as três medidas de dispersão conduziram à mesma conclusão.

Exercício resolvido

R5. O número de acidentes em um trecho de uma rodovia foi computado, mês a mês, durante o 1º semestre de 2012.

Foram obtidos os dados:

20 14 15 20 27 30

Calcular o desvio médio e o desvio padrão desse grupo de dados.

JOÃO CARLOS MAZELLA/FOTOARENA

Trânsito provocado por acidente na Rodovia Federal BR-232, Pernambuco, 2012.

▸ ***Resolução***

Primeiro, calculamos a média desses valores:

$$\bar{x} = \frac{20 + 14 + 15 + 20 + 27 + 30}{6} = \frac{126}{6} = 21$$

Depois, encontramos o desvio médio:

$$Dm = \frac{|20 - 21| + |14 - 21| + |15 - 21| + |20 - 21| + |27 - 21| + |30 - 21|}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

Para obter o desvio padrão, calculamos primeiro a variância. Para isso, fazemos a média aritmética dos quadrados dos desvios em relação à média dos valores observados:

$$Var = \frac{(20 - 21)^2 + (14 - 21)^2 + (15 - 21)^2 + (20 - 21)^2 + (27 - 21)^2 + (30 - 21)^2}{6} = \frac{204}{6} = 34$$

Agora, para obter o desvio padrão, basta calcular a raiz quadrada da variância: $Dp = \sqrt{34} \simeq 5{,}83$

Portanto, o desvio médio é de 5 acidentes, e o desvio padrão é de aproximadamente 5,83 acidentes.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução das questões **11**, **12** e **13** no Guia do professor.

10. (Femm) Dentre as amostras:

Amostra 1	0	1	2
Amostra 2	26	27	28
Amostra 3	1.002	1.005	1.003
Amostra 4	−5	10	25

alternativa d

qual é a amostra que possui maior desvio padrão?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4

11. Considere as amostras (grupo de dados) abaixo. Calcule a média, o desvio médio, a variância e o desvio padrão de cada uma delas.

a) 7, 5, 6, 6, 6, 4, 8, 6, 9 e 3

b) 7, 5, 11, 8, 3, 6, 2, 1, 9 e 8

c) 64, 49, 54, 64, 97, 66, 76, 44, 71 e 89

d) 70, 72, 71, 55, 60, 62, 46, 77, 86 e 71

e) 40, 31, 50, 48, 152, 44, 74, 38, 81 e 64

- Quais das amostras apresentam maior homogeneidade?

12. Uma locadora de filmes deseja saber o grau de satisfação de seus clientes diante de duas promoções (A e B) realizadas em finais de semana alternados. Para isso, 20 clientes, escolhidos ao acaso, deram notas de 1 a 5 conforme o índice de satisfação.

As notas obtidas foram:

Promoção A	Promoção B
5 5 4 4 5 3 4 4 5 5	3 3 2 3 2 2 2 2 2 2
5 1 4 4 5 4 4 5 4 5	1 3 1 1 2 2 4 4 3 2

Para cada promoção:

a) calcule a média; **b)** calcule o desvio padrão.

- Comente os resultados.

13. Observe os dois grupos de dados:

grupo A: 10 2 3 2 4 2 5

grupo B: 20 12 13 12 14 12 15

Para cada grupo de valores, calcule:

a) a média, a moda e a mediana;

b) o desvio médio, a variância e o desvio padrão.

- Compare as variabilidades desses grupos de valores.

14. Na locadora de automóveis Alugue Já, o número de veículos básicos (com motor 1.0) alugados durante 15 dias está relacionado abaixo:

25 32 25 28 30 21 23 40

25 26 22 23 25 28 31

Para esse período de 15 dias, responda às perguntas.

a) Qual é a média de veículos básicos alugados nessa locadora? ≃ 27

b) Qual é o número mediano de veículos básicos alugados nessa locadora? 25

c) Qual é o número de veículos básicos alugados com maior frequência? 25

d) Calcule o desvio médio de veículos básicos alugados nessa locadora. ≃ 3,67

e) Calcule a variância e o desvio padrão desse grupo de valores observados. $Var \simeq 22{,}07$ e $Dp \simeq 4{,}7$

f) Comente a variabilidade desse grupo de dados considerando o desvio padrão. Os valores desse grupo se distanciam do valor médio cerca de 4,7 veículos.

2.3 Medidas de dispersão para dados agrupados

Quando se trata de amostras muito grandes, é conveniente calcular as medidas de dispersão com base nas distribuições de frequências.

Variância e desvio padrão

Para obter a variância e o desvio padrão com os valores agrupados sem intervalos, procedemos de modo semelhante ao adotado para realizar os cálculos quando os dados não estão agrupados, utilizando no cálculo da variância a média aritmética ponderada dos quadrados dos desvios:

$$Var = \frac{f_1 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + f_n \cdot (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2\right]}{n} \text{ e } Dp = \sqrt{Var}$$

Contudo, se os valores estiverem agrupados em intervalos, devemos primeiro calcular os pontos médios de cada intervalo e, em seguida, proceder assim:

$$Var = \frac{f_1 \cdot (PM_1 - \overline{x})^2 + \ldots + f_n \cdot (PM_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2\right]}{n} \text{ e } Dp = \sqrt{Var}$$

Reflita

Reúnam-se em duplas e pensem na seguinte questão: se tivéssemos uma distribuição de frequências, cujos valores observados fossem todos iguais entre si, qual seria sua variância? Justifiquem suas respostas e deem exemplos. zero

Se achar conveniente, mostrar aos alunos que nas planilhas eletrônicas há fórmulas estatísticas prontas para calcular as medidas de tendência central e as medidas de dispersão para conjuntos de dados numéricos.
Ressaltar que usar esse recurso pode ser útil quando o número de elementos de uma amostra é muito grande e os dados não estão agrupados. Nesse caso, ordenar os dados e calcular cada uma das medidas pode ser bem trabalhoso e acarretar erros que poderiam atrapalhar na interpretação dos resultados.
Para usar essas funções estatísticas basta: digitar os dados na planilha (cada dado em uma célula), escolher o tipo de medida que se deseja calcular e selecionar o conjunto de dados.
Na maioria das planilhas geralmente temos:
MÉDIA para calcular a média aritmética;
MODO para determinar a moda;
MED para encontrar a mediana;
DESV.MEDIO para calcular o desvio médio;
VARP para calcular a variância;
DESVPADP para calcular o desvio padrão.
Caso ache interessante, propor aos alunos que escolham uma variável quantitativa (altura, por exemplo) e coletem os dados a respeito dos colegas da sala. A seguir, peça que insiram os dados em uma planilha eletrônica, calculem as medidas de tendência central e de dispersão e comentem os resultados obtidos.

Exemplos

a) Uma indústria produz 5.000 parafusos por dia. Foram coletadas para análise 100 medidas do diâmetro de parafusos (em milímetro). Vamos determinar a média e o desvio padrão da distribuição dos dados coletados.

Para obter a média, calculamos a média aritmética ponderada da distribuição:

$$\overline{x} = \frac{12 \cdot 1{,}1 + 27 \cdot 1{,}2 + 35 \cdot 1{,}3 + 20 \cdot 1{,}4 + 6 \cdot 1{,}5}{100}$$

$$\overline{x} = \frac{128{,}10}{100}$$

$$\overline{x} = 1{,}281$$

Para o cálculo do desvio padrão, vamos construir uma tabela:

Diâmetro dos parafusos da amostra

Medida do diâmetro x_i (em mm)	Quantidade de parafusos (f_i)
1,1	12
1,2	27
1,3	35
1,4	20
1,5	6
Total	100

Dados fictícios.

Medida do diâmetro x_i (em mm)	Quantidade de parafusos (f_i)	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_1 \cdot (x_i - \overline{x})^2$
1,1	12	−0,181	0,032761	0,393132
1,2	27	−0,081	0,006561	0,177147
1,3	35	0,019	0,000361	0,012635
1,4	20	0,119	0,014161	0,283220
1,5	6	0,219	0,047961	0,287766
	$\Sigma f_i = 100$			$\Sigma\,[f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2] = 1{,}1539$

Primeiro calculamos a variância:

$$Var = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2\right]}{n} = \frac{1{,}1539}{100} = 0{,}011539$$

Em seguida, obtemos o desvio padrão:

$$Dp = \sqrt{Var} = \sqrt{0{,}011539} \simeq 0{,}10742$$

Logo, a média das medidas do diâmetro dos parafusos da amostra é 1,281 mm, e o desvio padrão é aproximadamente 0,107 mm.

b) Na auditoria anual de uma empresa, foi anotado o tempo necessário (em minuto) para auditar 50 balanços.

Vamos caracterizar a dispersão da distribuição por meio do desvio padrão.

Para isso, primeiro determinamos o ponto médio de cada intervalo e, em seguida, calculamos a média:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 15 + 5 \cdot 25 + 10 \cdot 35 + 12 \cdot 45 + 20 \cdot 55}{50}$$

$$\bar{x} = \frac{2.160}{50}$$

$$\bar{x} = 43,2$$

Tempo para auditar os balanços	
Tempo de auditoria	**Número de balanços (f_i)**
[10, 20[	3
[20, 30[	5
[30, 40[	10
[40, 50[	12
[50, 60[	20

Dados fictícios.

Agora vamos construir uma tabela para facilitar os cálculos:

Tempo de auditoria	Número de balanços (f_i)	PM_i	$(PM_i - \bar{x})$	$(PM_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (PM_i - \bar{x})^2$
[10, 20[	3	15	−28,2	795,24	2.385,72
[20, 30[	5	25	−18,2	331,24	1.656,20
[30, 40[	10	35	−8,2	67,24	672,40
[40, 50[	12	45	1,8	3,24	38,88
[50, 60[	20	55	11,8	139,24	2.784,80
	$\Sigma f_i = 50$				$\Sigma[f_i \cdot (PM_i - \bar{x})^2] = 7.538$

Então:

$$Var = \frac{\sum_{i=1}^{n}[f_i \cdot (PM_i - \bar{x})^2]}{n} = \frac{7.538}{50} = 150,76$$

Assim:

$$Dp = \sqrt{Var} = \sqrt{150,76} \simeq 12,3$$

Logo, podemos dizer que os valores observados distanciam-se cerca de 12,3 min da média.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

15. Foram computados os números de viagens que clientes cadastrados num programa de fidelidade realizaram durante o ano:

Viagens realizadas durante o ano	
Número de viagens	**Número de clientes**
10	120
15	400
20	150

Dados fictícios.

Considerando a tabela:

a) calcule a variância e o desvio padrão; $Var \simeq 10,07$ e $Dp \simeq 3,17$

b) caracterize a dispersão desse conjunto segundo o desvio padrão. Os valores do grupo se distanciam cerca de 3,17 viagens do valor médio ($\simeq$ 15 viagens).

16. Os valores do grupo se distanciam cerca de R$ 101,37 do valor médio (R$ 465,00).

16. Abaixo temos a distribuição do valor dos aluguéis (em real) pagos por 200 pessoas em residências situadas na zona urbana de uma cidade de médio porte. Caracterize a variabilidade nessa situação usando o desvio padrão.

Aluguel pago por moradores da zona urbana da cidade	
Aluguel (R$)	**Número de pessoas (f_i)**
[200, 300[	10
[300, 400[	40
[400, 500[	80
[500, 600[	50
[600, 700[	20
Total	200

Dados fictícios.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. Numa pesquisa realizada com 100 famílias, foram levantadas as seguintes informações:

Filhos por família						
Número de filhos	0	1	2	3	4	5
Quantidade de famílias	17	25	28	19	7	4

Dados fictícios.

a) Qual é a mediana e a moda do número de filhos? 2 e 2

b) Qual é o número médio de filhos por casal? 1,86

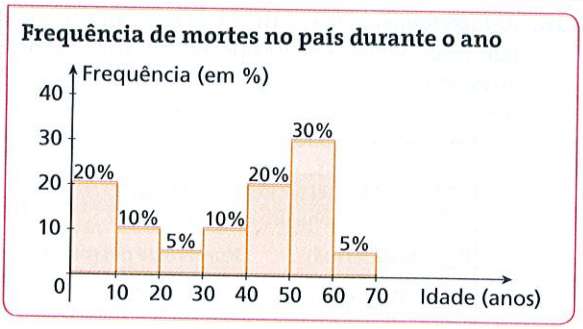
2. A média das massas de 25 clientes de um *spa* é 84 kg. A esse grupo juntaram-se *n* pessoas, que, curiosamente, pesavam 90 kg cada uma.

Determine o número *n* de pessoas sabendo que a média das massas do novo grupo formado passou para 85 kg. 5

3. (Vunesp) Sejam dois bairros, A e B, de certa cidade. O bairro A possui 1.000 residências, sendo o consumo médio mensal de energia elétrica por residência 250 kWh. Já o bairro B possui 1.500 residências, sendo o consumo médio mensal por residência igual a 300 kWh. O consumo médio mensal de energia elétrica por residência, considerando os dois bairros, A e B, é:

a) 275 kWh
b) 280 kWh
c) 287,5 kWh
d) 292,5 kWh alternativa b
e) 550 kWh

4. O índice de mortalidade é um dado socioeconômico que permite analisar as condições de vida da população de um país. O gráfico abaixo mostra a frequência relativa de mortes, em certo ano, distribuída por faixa etária, em um país cuja qualidade de vida é baixa. Encontre a mediana e a moda dessa distribuição. 42,5 e 55


ADILSON SECCO

Frequência de mortes no país durante o ano

Dados fictícios.

5. (Fuvest) O número de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foi: 5, 3, 1, 4, 0 e 2. Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nesta rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada? 18 gols

6. (Enem) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

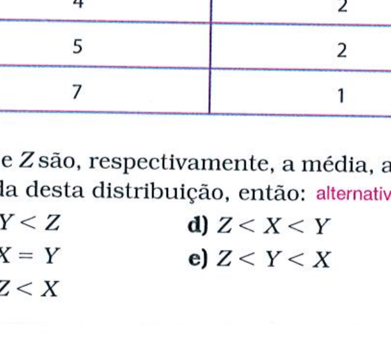
Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então: alternativa e

a) $X = Y < Z$
b) $Z < X = Y$
c) $Y < Z < X$
d) $Z < X < Y$
e) $Z < Y < X$

7. Cada um dos 60 alunos de uma turma obteve em uma prova nota 5 ou nota 10. A média dessas notas foi 6. Quantos alunos obtiveram nota 5? 48 alunos

8. O gráfico abaixo aparece com uma falha de impressão e não mostra a frequência entre 3 e 5 nem a frequência entre 5 e 7. Sabendo que a média é 2,8, determine os percentuais relativos a essas frequências.


ADILSON SECCO

9. Dado o conjunto de valores 2, 3, 5, 4 e 6, obtenha o desvio médio correspondente. 1,2

10. Considere a distribuição de frequências abaixo:

Dados observados	50	100	150
Frequência	30	60	10

$\bar{x} = 90$ e $Dp = 30$

Calcule a média e o desvio padrão dessa distribuição.

Exercício resolvido

R6. Para que valores reais de m as médias aritméticas dos grupos de valores -3, m, 10, 9 e -2, 3, m^2, -5 coincidem?

▸ ***Resolução***

Para que as médias coincidam devemos ter:

$$\frac{-3 + m + 10 + 9}{4} = \frac{-2 + 3 + m^2 - 5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m + 16 = m^2 - 4 \Rightarrow m^2 - m - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m - 5)(m + 4) = 0 \Rightarrow m = 5 \text{ ou } m = -4$$

Logo, as médias aritméticas dos dois grupos coincidem para $m = 5$ ou $m = -4$.

11. Considere os seguintes grupos de valores:

grupo A: x, 6, 3, 4, 5

grupo B: 9, 1, 4, 8, x, 6, 11, 3

Determine os possíveis valores inteiros de x de modo que a média no grupo A não ultrapasse 4 e que a média no grupo B seja, no mínimo, igual a 5.
-2, -1, 0, 1 e 2

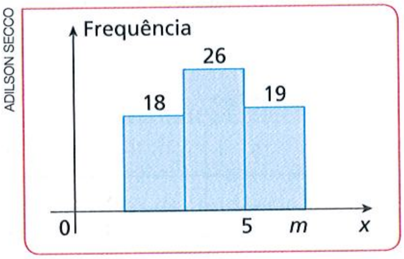
12. (FGV) Um conjunto de 10 valores numéricos x_1, x_2, x_3, ... x_{10} tem média aritmética igual a 100 e variância igual a 20. Ver justificativa das questões **12. a) e b)** no Guia do professor.

Se adicionarmos 5 a cada valor, isto é, se obtivermos o conjunto $(x_1 + 5)$, $(x_2 + 5)$, $(x_3 + 5)$, ... $(x_{10} + 5)$:

a) qual a média do novo conjunto de valores? Justifique. 105

b) qual a variância do novo conjunto de valores? Justifique. 20

13. O gráfico a seguir mostra os três primeiros intervalos de um histograma que representa a distribuição de frequências de uma variável x. Sabendo que a mediana dessa distribuição é 6,4 e que a classe mediana é $[5, m[$, determine o valor de m. 2,872



14. Uma quantia aplicada por 10 meses num fundo de investimentos rende 1% ao mês. Calcule o desvio padrão dessas taxas de rendimento nesse período. 0%

Aprofundamento

15. A média aritmética de sete números inteiros é 4. Determine-os sabendo que eles formam uma PA de razão 6. A seguir, indique a mediana desses valores.
-14, -8, -2, 4, 10, 16, 22 $Me = 4$

16. Calcule a média aritmética dos números reais log 2, log 3, log 4 e log 5, dado que log 1,2 = 0,08. 0,52

17. A média aritmética dos números a_1, a_2, a_3, ..., a_{14}, a_{15} é 24. Determine a média aritmética dos números: $a_1 + 1$, $a_2 + 2$, $a_3 + 3$, ..., $a_{14} + 14$ e $a_{15} + 15$ 32

18. Considere o grupo de valores observados: 2, 4, 6 e k. Calcule os valores possíveis de k para que o desvio padrão desse grupo seja $\sqrt{5}$. 0 ou 8

19. As taxas de juro recebidas por 10 ações durante certo período de tempo foram (em %): 2,48; 2,60; 2,53; 2,72; 2,64; 2,63; 2,67; 2,51; 2,61 e 2,51.

a) Qual foi a média das taxas de juro recebidas? 2,59%

b) Ache a mediana e o desvio médio desses valores.
$Me = 2{,}605\%$ e $Dm = 0{,}066\%$

20. A tabela mostra a distribuição de cartões recebidos por um time durante 45 partidas de um torneio.

Cartões recebidos pelo time no torneio

Número de cartões	0	1	2	3	4
Número de partidas	5	19	10	7	4

Dados fictícios.

Calcule o desvio padrão do número de cartões recebidos.
$\simeq 1{,}13$

21. O Departamento de Aviação Civil registrou, durante cinco dias, o percentual diário de voos de duas companhias aéreas, A e B, que decolaram sem atraso.

Percentual diário de voos que decolaram sem atraso

Companhia A	90%	92%	95%	88%	91%
Companhia B	97%	88%	98%	86%	90%

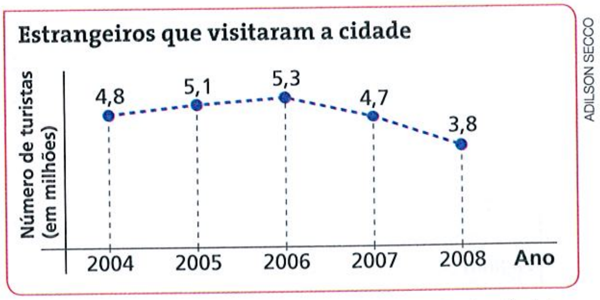
Fonte: Departamento de Aviação Civil.

a) Que companhia teve o percentual médio mais alto? B

b) Que companhia teve desempenho mais regular? A

Desafio

22. O gráfico a seguir mostra a quantidade de estrangeiros que visitaram certa cidade. Determine o desvio padrão dos dados apresentados. $\simeq 0{,}516$



Dados fictícios.

Autoavaliação

Leia atentamente as questões a seguir e responda-as em seu caderno.

1. Considerando os valores 7, 11, 8, 14 e 10, podemos afirmar que, para essa amostra, a média aritmética é ▬▬▬, a moda ▬▬▬ e a mediana ▬▬▬. alternativa c

a) 10, é 10, não existe
b) 10, não existe, é 8
c) 10, não existe, é 10
d) 10, não existe, é 14

2. ▬▬▬ é a única medida de tendência central que admite mais de um valor. alternativa b

a) A média
b) A moda
c) A variância
d) O desvio padrão

3. Samanta almoça em um restaurante próximo a seu trabalho de segunda a sexta. Na semana passada ela gastou as seguintes quantias: R$ 16,00, R$ 15,00, R$ 17,00, R$ 14,00 e R$ 15,00. Portanto, seu gasto médio com almoço na semana passada foi: alternativa d

a) R$ 15,00.
b) R$ 16,50.
c) R$ 15,50.
d) R$ 15,40.

4. Oito amigas têm, respectivamente, 13, 12, 12, 15, 14, 12, 13 e 15 anos. Podemos dizer que a idade mais frequente, ou idade ▬▬▬, é ▬▬▬ anos. alternativa b

a) mediana; 13
b) modal; 12
c) média; 12
d) mediana; 14

5. Nos cálculos da média, moda e mediana para dados agrupados devemos considerar ▬▬▬ como representantes dos intervalos. alternativa d

a) as frequências
b) o extremo inferior
c) o extremo superior
d) os pontos médios

6. O desvio padrão ▬▬▬ quando todos os valores observados são iguais. alternativa b

a) não existe
b) é zero
c) é negativo
d) é não nulo

7. ▬▬▬ é o desvio médio e ▬▬▬ é a variância da distribuição 1, 2, 3, 4 e 5. alternativa d

a) 1,5; 2
b) 1,0; 10
c) 1,2; 10
d) 1,2; 2

8. Uma pesquisa de bairro constatou que um mesmo produto era vendido por preços diferentes nas 6 lojas que o comercializavam em determinada rua. Os preços encontrados foram R$ 9,00, R$ 5,00, R$ 8,00, R$ 10,00, R$ 4,00 e R$ 6,00. A pesquisa calculou o desvio padrão desses valores, que é aproximadamente: alternativa d

a) 3,1
b) 1,0
c) 1,8
d) 2,2

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Calcular e interpretar média, moda e mediana de uma distribuição.	X	X	X	X	X			
Resolver situações-problema que envolvam essas medidas de tendência central.			X	X				
Calcular e interpretar desvio médio, variância e desvio padrão de um conjunto de valores observados.						X	X	X
Resolver situações-problema que envolvam essas medidas de dispersão.								X
Páginas do livro referentes ao conceito	56 a 62	56 a 62	59 a 62	59 a 62	62 a 68	69 a 71	69 a 71	69 a 73

Desenvolvimento sustentável

Alguns temas relacionados ao meio ambiente tem despertado o interesse da sociedade pois apontam um futuro bastante preocupante se algumas situações não forem modificadas.

A *Conferência das Nações Unidas sobre Desenvolvimento Sustentável*, que ficou popularmente conhecida como Rio+20, aconteceu em julho de 2012 na cidade do Rio de Janeiro, e trouxe para a discussão sete grandes temas a respeito de desenvolvimento sustentável.

Vamos criar um telejornal, com as informações, dados estatísticos, contextualizações e ilustrações (fotos, gráficos, tabelas etc.) sobre um dos temas abordados na Rio+20.

EDSON SATO/PULSAR IMAGENS

Vista aérea do rio Auarís, região dos yanomami, Amajaraí, RR, 2010.

EDSON GRANDISOLI/PULSAR IMAGENS

Igarapé no Rio Negro, Manaus, AM, 2012.

Procedimentos

1) Nesta atividade, você e mais três colegas deverão pesquisar um desses temas listados a seguir e, em seguida, organizar um telejornal.

Os temas abordados pela conferência Rio+20 foram:

- Cidades sustentáveis;
- Emprego e inclusão social;
- Água para o mundo;
- Segurança alimentar e agricultura sustentável;
- Desastres e sociedades resilientes;
- Energia sustentável para todos;
- Oceanos.

Após a escolha do tema, o grupo deverá levantar diferentes informações relativas ao tema, relacionando com o desenvolvimento sustentável das cidades e das comunidades.

2) Em seguida, deve levantar dados estatísticos de como esse tema se apresenta nos dias de hoje. Por exemplo, pode-se pesquisar a respeito do uso de agrotóxicos, caso se escolha o tema "segurança alimentar e agricultura sustentável". Neste ponto da pesquisa, é necessário apresentar as medidas de tendência central, como a média aritmética, a mediana e a moda. Além disso, o grupo deverá construir gráficos e tabelas. (*Dica*: usem planilhas eletrônicas.)

3) Organizados os dados, agora é o momento da escolha das imagens que retratam o tema.

4) Após a preparação de todo o material, o grupo deverá escrever o roteiro do telejornal, que poderá ser filmado e exibido na sala de aula, ou poderá ser encenado ao vivo, diante do professor e dos colegas.

5) Os sete temas apresentados comporão um cenário mundial sobre sustentabilidade, com informações atuais sobre os temas e as perspectivas futuras. O conjunto de todos os trabalhos poderá ser apresentado para toda comunidade escolar e esta discussão pode avançar para outras disciplinas.

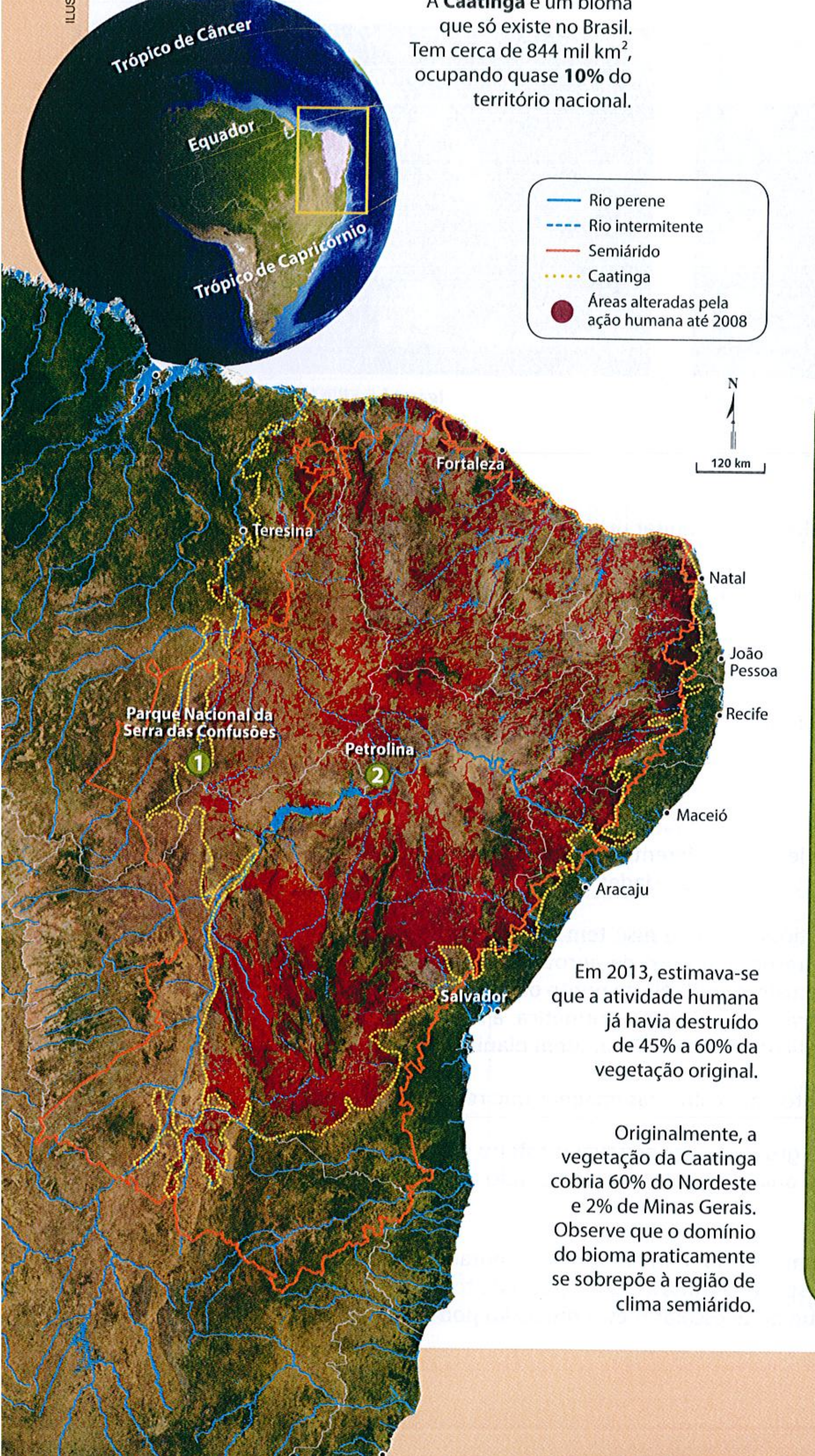
Compreensão de texto

Este infográfico permite um trabalho interdisciplinar com Geografia e Biologia.

Os ciclos da caatinga

Entender a caatinga e a vida que evoluiu nesse bioma sob intensa insolação, temperatura elevada, ciclos irregulares de chuvas e longas estiagens é fundamental para preservar suas riquezas e melhorar a vida de seus habitantes.

ILUSTRAÇÕES: EDER SILVESTRE


Trópico de Câncer
Equador
Trópico de Capricórnio
Rio perene
Rio intermitente
Semiárido
Caatinga
Áreas alteradas pela ação humana até 2008
N
120 km
Fortaleza
Teresina
Natal
João Pessoa
Recife
Parque Nacional da Serra das Confusões
1
Petrolina
2
Maceió
Aracaju
Salvador

A **Caatinga** é um bioma que só existe no Brasil. Tem cerca de 844 mil km^2, ocupando quase **10%** do território nacional.

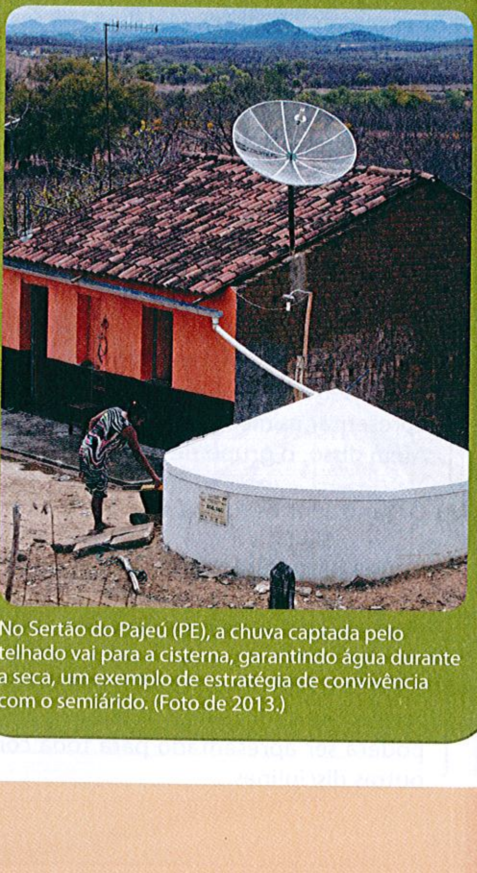
Em 2013, estimava-se que a atividade humana já havia destruído de 45% a 60% da vegetação original.

Originalmente, a vegetação da Caatinga cobria 60% do Nordeste e 2% de Minas Gerais. Observe que o domínio do bioma praticamente se sobrepõe à região de clima semiárido.

Longe de ser homogênea, a Caatinga abriga ambientes muito diferentes, desde florestas com árvores de até 20 metros (a caatinga arbórea) até áreas com solos muito rasos e rochosos, dominadas por arbustos baixos, cactos e bromélias. Das **932 espécies** vegetais identificadas na Caatinga até 2008, 318 eram endêmicas, muitas não existem em nenhum outro lugar do planeta. São muitas as riquezas da região, que, por serem tão pouco estudadas e protegidas, correm sério risco de desaparecer.

População da Caatinga

A Caatinga tem cerca de 20 milhões de habitantes, mais de um terço deles no campo, com centenas de comunidades tradicionais, como indígenas, quilombolas, vaqueiros e camponeses. Essas populações procuram se adaptar e conviver com o semiárido, valorizando os saberes tradicionais e empregando novas tecnologias locais.



ROGÉRIO REIS/PULSAR IMAGENS

No Sertão do Pajeú (PE), a chuva captada pelo telhado vai para a cisterna, garantindo água durante a seca, um exemplo de estratégia de convivência com o semiárido. (Foto de 2013.)

Atividades

Registre as respostas em seu caderno

Ver resoluções no Guia do professor.

1. O infográfico traz informações sobre um dos biomas brasileiros. Qual é esse bioma? Quais características desse bioma foram apresentadas?
2. A vegetação da Caatinga corre sério risco de desaparecer. Por quê?
3. Uma das estratégias de convivência com o semiárido é o uso de cisternas para captar a água da chuva, garantindo o abastecimento durante a seca. Pesquise outras estratégias usadas pelos habitantes da Caatinga para driblar o problema da seca.
4. Os gráficos apresentados referem-se a duas regiões: Serra das Confusões (PI) e Petrolina (PE). Com relação aos valores da precipitação contidos nos dois gráficos, identifique qual das regiões apresenta maior grau de dispersão (ou variabilidade).
5. Junte-se a quatro colegas e elaborem uma apresentação sobre outro bioma brasileiro. Apresentem para o professor e para o restante da turma o bioma pesquisado e suas características, comparando-o com a Caatinga.

Período de seca

Adaptada para conter a perda de água, a vegetação perde suas folhas quando a seca se aproxima e uma cor cinza tinge a paisagem seca.

OTÁVIO NOGUEIRA/CC BY 2.0/FLICKR

O Parque Nacional da Serra das Confusões (PI), com 823,4 mil hectares, é a maior unidade de conservação do nordeste. (Foto de 2012.)

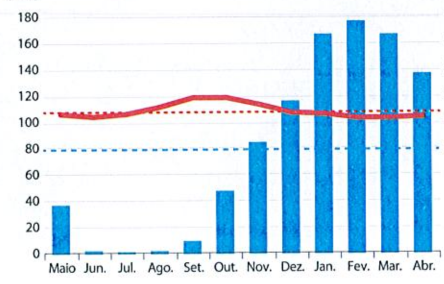
NILTON DE BRITO CAVALCANTI

Cerca de 178 espécies de mamíferos, de preás a onças, vivem no bioma, como essa raposa (*Dusicyon thous*). (Foto de 2002.)

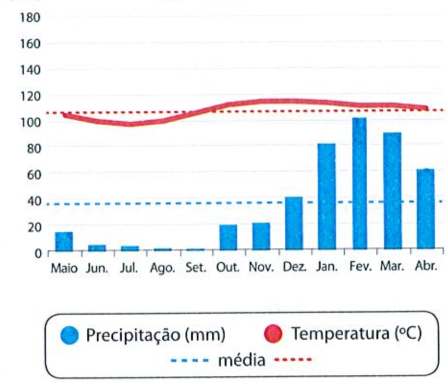
Precipitação e temperatura mensais

(médias 2003-2012)

① **Serra das Confusões, PI**

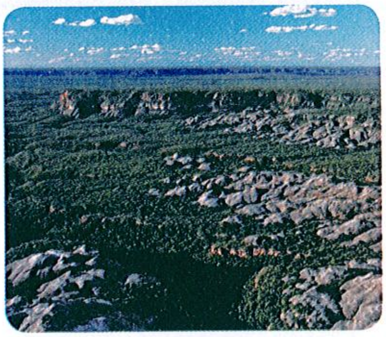


② **Petrolina, PE**



Período de chuva

Os habitantes da Caatinga chamam essa época de inverno, período em que as chuvas amenizam o calor e a vegetação se torna exuberantemente verde.



ADRIANO GAMBARINI

Esse é o bioma brasileiro menos protegido. Nem 1,5% da Caatinga está em áreas de proteção integral como a da Serra das Confusões. (Foto de 2009.)

FABIO COLOMBINI

O período de chuva sertanejo é marcado pelo retorno do corrupião (*Icterus jamacaii*) e de outras aves que migram na seca. (Foto de 2004.)

Fontes: INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA. Banco de dados meteorológicos para ensino e pesquisa. Disponível em: <www.inmet.gov.br/projetos/rede/pesquisa/>. INSTITUTO SOCIOAMBIENTAL. Almanaque Brasil Socioambiental 2008. São Paulo, 2007. MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE (MMA). Monitoramento do bioma caatinga 2002 a 2008. Brasília, 2010. MMA. Caatinga. Disponível em: <www.mma.gov.br/biomas/caatinga>. Acessos em: 17 jun. 2013.

Capítulo 4

Conceitos básicos e a reta

ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI

Objetivos do capítulo

- Representar pontos, segmentos e retas no plano cartesiano.
- Calcular a distância entre dois pontos.
- Escrever de diferentes formas a equação de uma reta.
- Discutir posições relativas entre duas retas.
- Calcular a distância entre ponto e reta.
- Resolver inequações do 1º grau com duas variáveis e sistemas.
- Calcular a área de um triângulo.

1 O ponto

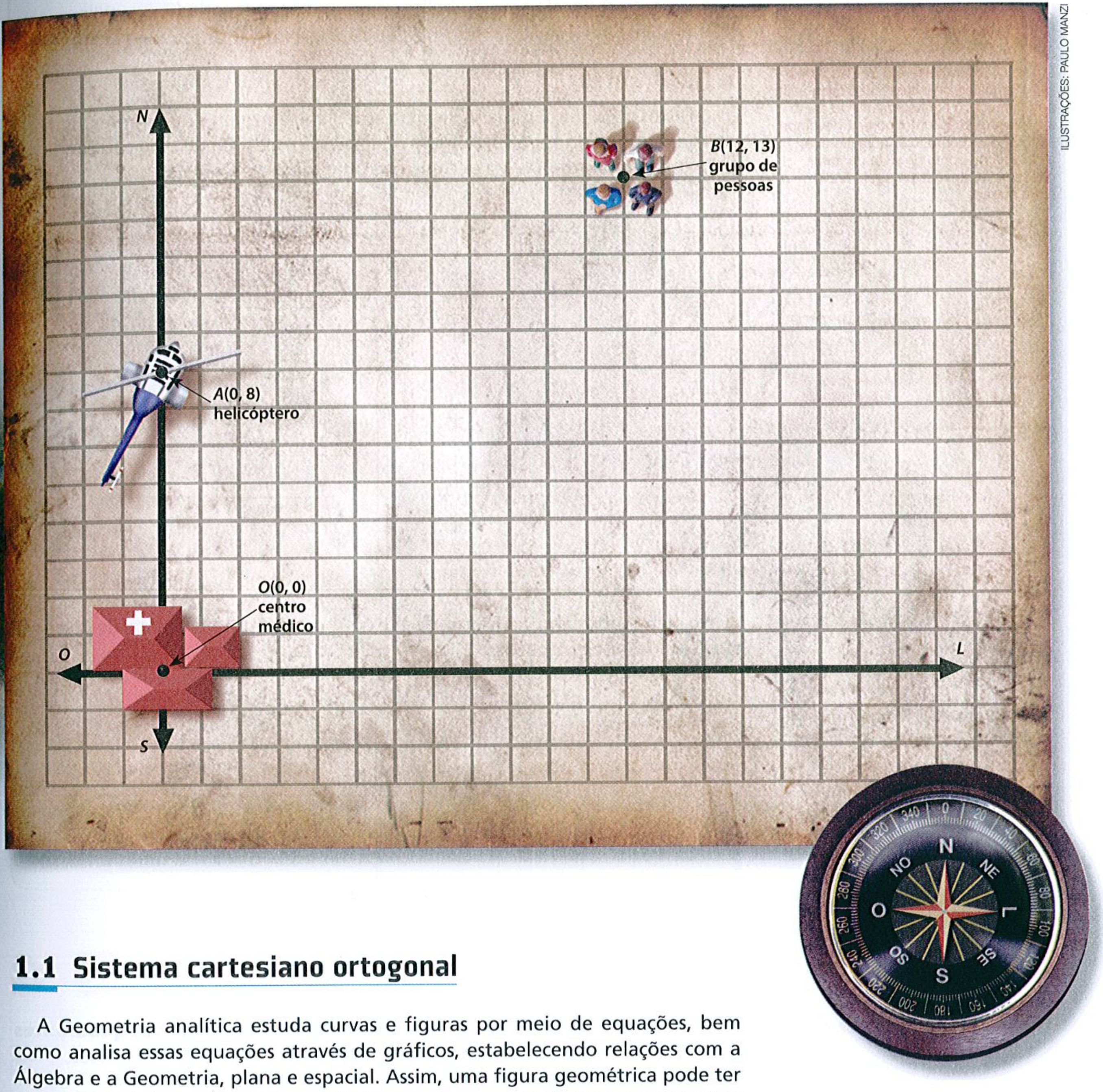
O corpo de bombeiros de certa região florestal recebeu o chamado de um grupo de pessoas que se perdeu em uma caminhada na mata. Para o resgate, há um helicóptero, que está posicionado a 8 km ao norte do centro médico local, conforme indica o esquema da página ao lado. Qual a menor distância que o helicóptero deve percorrer até encontrar as pessoas perdidas?

A menor distância que o helicóptero percorrerá até o local onde se encontra o grupo é dada pela distância entre o ponto *A* (localização do helicóptero) e o ponto *B* (localização do grupo de pessoas), assinalados no esquema.

Sabemos que a menor distância entre esses pontos é a medida do segmento de extremidades *A* e *B*.

Neste capítulo, estudaremos o **sistema cartesiano ortogonal** e a **distância entre dois pontos** — ferramentas que serão usadas na resolução desse problema.

A Geometria analítica fundamenta-se no estudo de pontos, retas e curvas, por meio do qual é possível transpor inúmeros problemas geométricos para a linguagem algébrica.



ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI

1.1 Sistema cartesiano ortogonal

A Geometria analítica estuda curvas e figuras por meio de equações, bem como analisa essas equações através de gráficos, estabelecendo relações com a Álgebra e a Geometria, plana e espacial. Assim, uma figura geométrica pode ter suas propriedades analisadas e estudadas por processos algébricos, o que facilita a resolução de vários problemas.

A seguir, faremos um estudo do **ponto** sob o enfoque da Geometria analítica.

O **sistema cartesiano ortogonal** é formado por dois eixos perpendiculares entre si. O eixo x (horizontal) é o eixo das **abscissas**, e o eixo y (vertical) é o eixo das **ordenadas**. Os eixos se cruzam no ponto $O(0, 0)$, denominado **origem** das coordenadas do plano cartesiano.

Podemos localizar qualquer ponto P do plano cartesiano por meio de um único par ordenado (x_P, y_P) de números reais e, reciprocamente, dado um par ordenado (x_P, y_P) de números reais, a ele fica associado um único ponto P pertencente ao plano.

Exemplo

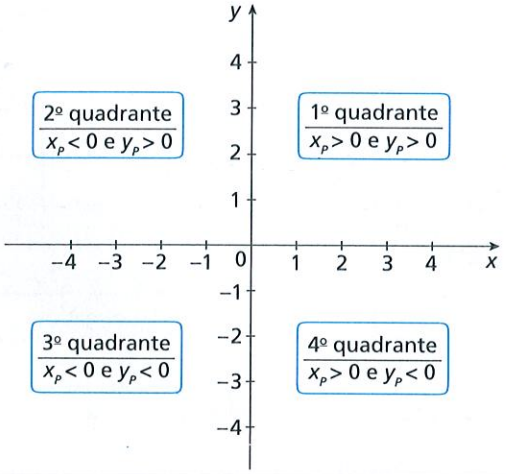
Considerando o problema da abertura do capítulo, podemos associar na figura:

- o ponto O (localização do centro médico) à origem das coordenadas do plano cartesiano (0, 0);
- o ponto A (localização do helicóptero) ao par ordenado (0, 8);
- o ponto B (localização do grupo de pessoas) ao par ordenado (12, 13).

O livro *O caderno secreto de Descartes* (ver "Sugestão de leitura" na página 208) pode ampliar o conhecimento do aluno em relação ao assunto; porém, devemos lembrar que, como toda obra literária, se baseia no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre outras.

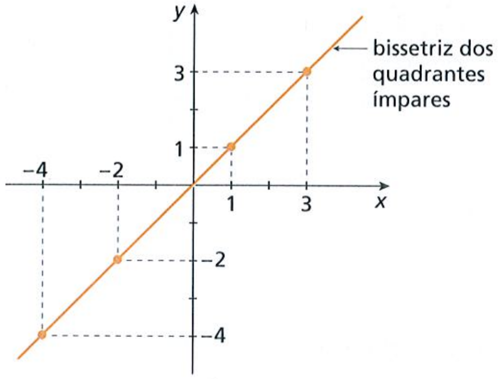
Quadrantes

Os eixos do plano cartesiano dividem esse plano em quatro quadrantes, numerados no sentido anti-horário. A figura abaixo indica essa numeração e as condições para que um ponto $P(x_P, y_P)$ pertença ao quadrante.


y
x
2º quadrante
$x_P < 0$ e $y_P > 0$
1º quadrante
$x_P > 0$ e $y_P > 0$
3º quadrante
$x_P < 0$ e $y_P < 0$
4º quadrante
$x_P > 0$ e $y_P < 0$
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4 −3 −2 −1
1 2 3 4

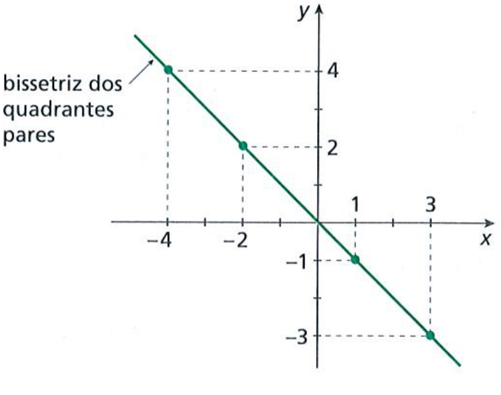
ADILSON SECCO

No plano cartesiano, a bissetriz do 1º e do 3º quadrantes é chamada de **bissetriz dos quadrantes ímpares**.


y
x
bissetriz dos quadrantes ímpares
3
1
−2
−4
−4
−2
1
3

ADILSON SECCO

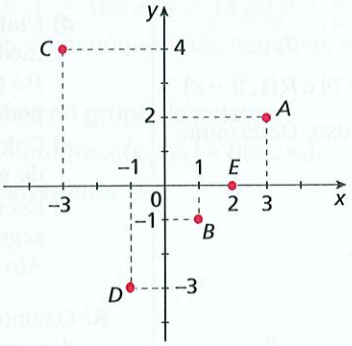
Já a bissetriz do 2º e do 4º quadrantes é chamada de **bissetriz dos quadrantes pares**.


y
x
bissetriz dos quadrantes pares
4
2
−1
−3
−4
−2
1
3

ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R1. Determinar as coordenadas dos pontos indicados no plano cartesiano.



▸ ***Resolução***

Observando a figura, percebemos que o ponto A está associado ao par ordenado $(3, 2)$; o ponto B, ao $(1, -1)$; o ponto C, ao $(-3, 4)$; o ponto D, ao $(-1, -3)$; e o ponto E, ao $(2, 0)$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R2. Representar no plano cartesiano os pontos $A(1, 5)$, $B(4, 1)$ e $C(1, 1)$ e traçar os segmentos com extremidades nesses pontos.

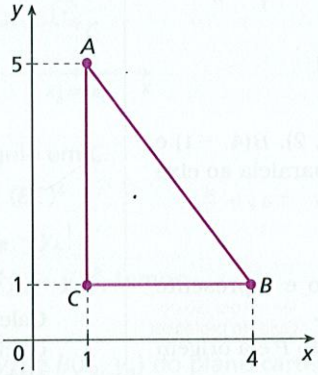
▸ ***Resolução***

As coordenadas do ponto A são $x_A = 1$ e $y_A = 5$.

As coordenadas do ponto B são $x_B = 4$ e $y_B = 1$.

As coordenadas do ponto C são $x_C = 1$ e $y_C = 1$.

Note que os pontos A, B e C determinam o $\triangle ABC$.



Reflita

Os pontos $D(0, 0)$, $E(-3, -6)$ e $F(2, 4)$ determinam um triângulo? Por quê?

Não, porque os pontos D, E e F estão alinhados.

R3. Obter os valores de a e de b para que os pontos $A(a^2 - 8, 1)$ e $B(4, b - 4)$ pertençam, respectivamente, ao eixo das ordenadas e ao eixo das abscissas.

▸ ***Resolução***

Se o ponto A pertence ao eixo das ordenadas, então $x_A = 0$.

Assim: $a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$ ou $a = -2\sqrt{2}$

Se o ponto B pertence ao eixo das abscissas, então $y_B = 0$.

Assim: $b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4$

Observação

- Se um ponto P pertence ao eixo das abscissas, suas coordenadas são $(x_P, 0)$.
- Se um ponto P pertence ao eixo das ordenadas, suas coordenadas são $(0, y_P)$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Construa o plano cartesiano no seu caderno e localize os pontos $A(-1, -4)$, $B(7, 1)$, $C(2, -2)$, $D(-6, 0)$, $E\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$ e $F(4, 6)$. Ver resolução no Guia do professor.

2. Observe as coordenadas dos pontos e descubra a que quadrante cada um deles pertence, sem localizá-los no plano cartesiano.

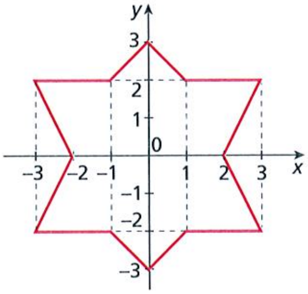
a) $\left(3, -\sqrt{2}\right)$ 4º quadrante

b) $(-\pi, -4)$ 3º quadrante

c) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \pi\right)$ 1º quadrante

d) $(-1, 1)$ 2º quadrante

3. Considere o polígono representado no plano cartesiano:



ADILSON SECCO

a) Quantos são os vértices desse polígono? 12

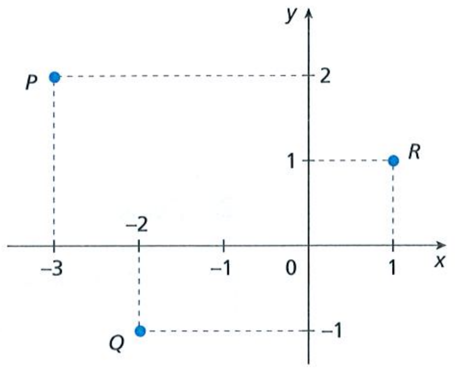
b) Determine as coordenadas desses vértices.

$(0, 3)$, $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(2, 0)$, $(3, -2)$, $(1, -2)$, $(0, -3)$, $(-1, -2)$, $(-3, -2)$, $(-2, 0)$, $(-3, 2)$, $(-1, 2)$

7. d) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos percebam que basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo cujos vértices são os pontos P e Q e a origem do plano cartesiano.

4. Para que valores de m e n o ponto $A(m - 8, n - 5)$ pertence ao 2º quadrante? Explique como você obteve esses valores. $m, n \in \mathbb{R}$ tais que $m < 8$ e $n > 5$.

5. Os pontos $P\left(\frac{1}{2} + a, 2\right)$, $Q(-2, 5 - b)$ e $R(1, 3 - c)$ estão representados na figura abaixo. Determine o valor de $a \cdot b \cdot c$. -42



ADILSON SECCO

6. Sabendo que os pontos $A(5x - 1, 2)$, $B(4, -1)$ e $C(3y, 0)$ pertencem a uma reta r paralela ao eixo das ordenadas, determine x e y. $x = 1$ e $y = \frac{4}{3}$

7. Resolva os itens a seguir.

a) Construa um plano cartesiano e represente nele os pontos $P(8, 0)$ e $Q(0, 6)$. Ver resolução no Guia do professor.

b) Calcule a distância entre o ponto P e a origem do plano cartesiano. 8

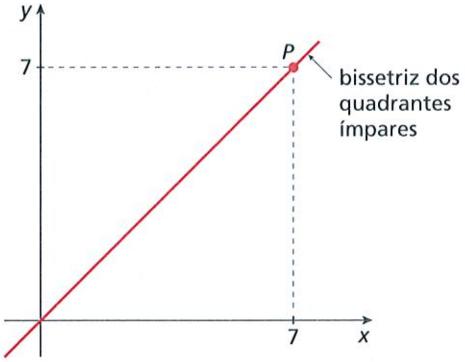
c) Calcule a distância entre o ponto Q e a origem do plano cartesiano. 6

d) Elabore uma estratégia para determinar a medida do segmento determinado pelos pontos P e Q representados no plano cartesiano. Você pode resolver este item com um colega.

e) Calcule a distância entre os pontos P e Q usando a estratégia elaborada no item anterior. 10

f) Escreva, em função de a e b, a medida de um segmento que tem como extremidade os pontos $A(a, 0)$ e $B(0, b)$. $\sqrt{a^2 + b^2}$

8. O ponto P representado abaixo pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.



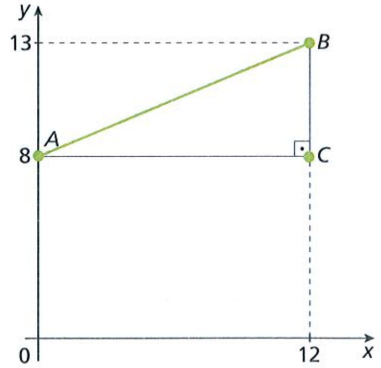
ADILSON SECCO

Calcule a distância do ponto P à origem do sistema de eixos coordenados. Você pode usar a estratégia elaborada no exercício anterior. $7\sqrt{2}$

1.2 Distância entre dois pontos

Em muitas situações cotidianas, precisamos conhecer a distância entre dois pontos. Um exemplo é o problema apresentado no início deste capítulo, no qual foram fornecidas as localizações de um grupo de pessoas na mata (ponto B), a serem resgatadas por um helicóptero (ponto A). Uma pergunta relevante é: a que distância o helicóptero está do grupo de pessoas?

Transportando os dados para o plano cartesiano, temos:



ADILSON SECCO

Para responder à questão, vamos considerar no plano cartesiano o ponto auxiliar $C(12, 8)$. Assim:

- distância do ponto A ao C ($d_{A,C}$): 12 km
- distância do ponto B ao C ($d_{B,C}$): 5 km
- distância do ponto A ao B ($d_{A,B}$): d km

Reflita

Qual seria a distância percorrida pelo helicóptero da sua localização inicial ao centro médico local passando pelo ponto de resgate das pessoas?

Ver resolução no Guia do professor.

Os pontos A, B e C são os vértices de um triângulo retângulo. Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

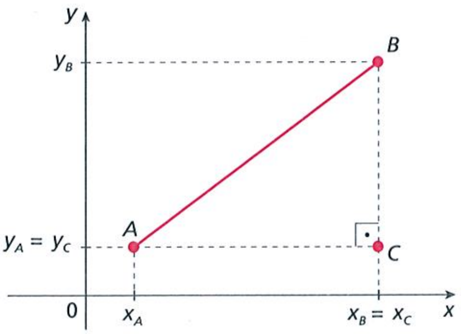
$(d_{A,\,B})^2 = (d_{A,\,C})^2 + (d_{B,\,C})^2 \Rightarrow d^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow d^2 = 169 \Rightarrow d = 13$ ou $d = -13$

A distância entre dois pontos, por definição, é um número não negativo; então $d = 13$ km.

Logo, o helicóptero está a 13 km de distância do grupo de pessoas.

Vamos determinar a distância $d_{A,\,B}$ entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Para isso, vamos representá-los no plano cartesiano:



ADILSON SECCO

Repare que temos um triângulo ABC, retângulo em C.

Pelo teorema de Pitágoras: $(d_{A,\,B})^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

Sabemos que $AC = |x_B - x_A|$ e que $BC = |y_B - y_A|$.

Como $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$ e $|y_B - y_A|^2 = (y_B - y_A)^2$, temos:

$(d_{A,\,B})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

Portanto, a distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do plano cartesiano é dada por:

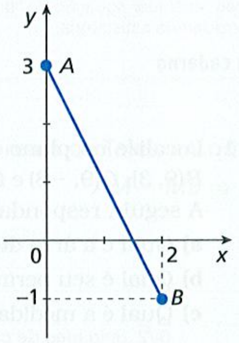
$$d_{A,\,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Observação

A fórmula ao lado também funciona quando A e B estão alinhados horizontal ou verticalmente.

Exercícios resolvidos

R4. Calcular a distância entre os pontos $A(0, 3)$ e $B(2, -1)$.



ADILSON SECCO

▸ ***Resolução***

Como $A(0, 3)$ e $B(2, -1)$, então, $x_A = 0$, $y_A = 3$, $x_B = 2$ e $y_B = -1$.

Substituindo esses valores em $d_{A,\,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, temos:

$d_{A,\,B} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-1 - 3)^2} \Rightarrow d_{A,\,B} = 2\sqrt{5}$

R5. Dados os pontos $A(-2, m)$ e $B(1, 3)$, determinar m para que a distância entre A e B seja 5 unidades.

▸ ***Resolução***

Como a distância entre A e B deve ser 5 unidades, temos:

$(d_{A,B})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

$5^2 = (1 + 2)^2 + (3 - m)^2$

$25 = 3^2 + 9 - 6m + m^2$

$m^2 - 6m - 7 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, encontramos dois valores de m que tornam a distância entre A e B igual a 5 unidades:

$m = 7$ ou $m = -1$

R6. Determinar o perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ e $C(5, -1)$.

▸ ***Resolução***

Vamos calcular as medidas dos lados do triângulo ABC:

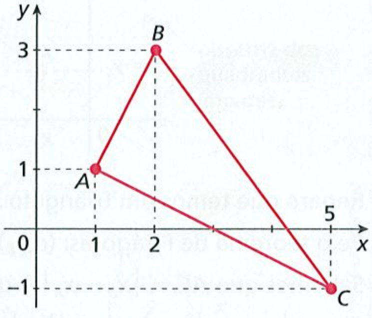
$d_{A,B} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$d_{B,C} = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$d_{A,C} = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Portanto, o perímetro desse triângulo é:

$\left(3\sqrt{5} + 5\right)$ unidades de comprimento



R7. Determinar o ponto $C(m, 2m)$ equidistante dos pontos $A(-7, 0)$ e $B(3, 0)$.

▸ ***Resolução***

Como o ponto C é equidistante dos pontos A e B, a distância entre C e A é a mesma que entre C e B. Assim:

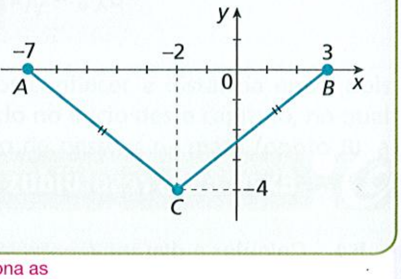
$d_{C,A} = d_{C,B} \Rightarrow \sqrt{(m+7)^2 + (2m-0)^2} = \sqrt{(m-3)^2 + (2m-0)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (m+7)^2 + 4m^2 = (m-3)^2 + 4m^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 + 14m + 49 = m^2 - 6m + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = -2$

Substituindo $m = -2$, obtemos $C(-2, -4)$.



Dadas certas condições, muitas questões, como por exemplo o exercício **15**, pedem **a** equação que relaciona as variáveis envolvidas. Entendemos que, embora a ordem do exercício peça **a** equação, qualquer equação da "família de equações equivalentes" à equação dada como resposta neste livro pode ser considerada satisfatória.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

9. Calcule a distância entre os pontos de cada item.

a) $A(2, 1)$ e $B(5, 5)$ 5

b) $A(0, 0)$ e $B(-1, 3)$ $\sqrt{10}$

c) $D(-4, -2)$ e $E(0, 7)$ $\sqrt{97}$

d) $C\left(4\sqrt{3}, 5\right)$ e $B\left(6\sqrt{3}, 3\right)$ 4

10. Determine a distância do ponto $C(2, 3)$:

a) à origem; $\sqrt{13}$

b) ao eixo das ordenadas; 2

c) ao eixo das abscissas. 3

11. Localize no plano cartesiano os vértices $A(3, 3)$, $B(9, 3)$, $C(9, -3)$ e $D(3, -3)$ do quadrilátero $ABCD$. A seguir, responda às perguntas.

a) Qual é a área desse quadrilátero? 36 unidades de área

b) Qual é seu perímetro? 24 unidades de comprimento

c) Qual é a medida de sua diagonal? $6\sqrt{2}$ unidades de comprimento

12. Obtenha o ponto do eixo das ordenadas equidistante de $A(6, 8)$ e de $B(2, 5)$. $P\left(0, \frac{71}{6}\right)$

13. Considere $A(-2, -5)$, $B(-4, -1)$ e $C(4, 3)$ vértices do triângulo ABC. Explique como você faria para provar que esse triângulo é retângulo.
Ver resolução no Guia do professor.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

14. Em cada caso, registre se o triângulo de vértices A, B e C é equilátero, escaleno ou isósceles.

a) $A(1, 6)$, $B(2, 3)$ e $C(4, 5)$ isósceles

b) $A(7, 1)$, $B(10, 4)$ e $C(3, 5)$ escaleno

c) $A(0, 0)$, $B(2, 2\sqrt{3})$ e $C(4, 0)$ equilátero

15. O ponto $C(x, y)$ é equidistante dos pontos $Q(1, 2)$ e $R(6, 7)$. Determine a equação que relaciona x e y. $y = -x + 8$

16. A distância entre os pontos $B(-2b, b)$ e $C(3, 1)$ é $\sqrt{5}$. Determine as coordenadas do ponto B. $B(2, -1)$

17. Seja r a distância do ponto $Q(x, y)$ à origem das coordenadas do plano cartesiano. Em cada caso, escreva o sinal da fração.

a) $\frac{y}{r}$ quando Q pertence ao 1º quadrante > 0

b) $\frac{r}{xy}$ quando Q pertence ao 2º quadrante < 0

c) $\frac{r}{x}$ quando Q pertence ao 4º quadrante > 0

d) $\frac{y}{x}$ quando Q pertence ao 3º quadrante > 0

18. Dois dos vértices de um triângulo equilátero ABC são $A(2, -5)$ e $B(3, -4)$. Determine as coordenadas do vértice C. Ver resolução no Guia do professor.

19. Considere no plano cartesiano os pontos $P(2, 3)$ e $Q(5, 3)$. Após girar o segmento $\overline{PQ}$ em torno de P em um ângulo de 60° no sentido horário, obtém-se o segmento $\overline{PR}$. Ver resolução no Guia do professor.

a) Ilustre a situação em um plano cartesiano.

b) Qual é a medida do segmento $\overline{PQ}$? E do segmento $\overline{PR}$? Explique.

c) Classifique o $\triangle PQR$ quanto aos lados.

d) Quais as coordenadas do ponto R?

e) Refaça os itens anteriores supondo agora que o movimento do segmento $\overline{PQ}$ ocorra no sentido anti-horário. O que você pode concluir?

20. (UEL) Os vértices do triângulo retângulo de menor perímetro cujos catetos estão sobre os eixos x e y, cuja hipotenusa passa pelo ponto $(2, 4)$ e cuja área é igual a 18 são: alternativa d

a) $(0, 3)$, $(0, 0)$ e $(6, 0)$

b) $(0, 3)$, $(0, 0)$ e $(12, 0)$

c) $(0, 6)$, $(0, 0)$ e $(3, 0)$

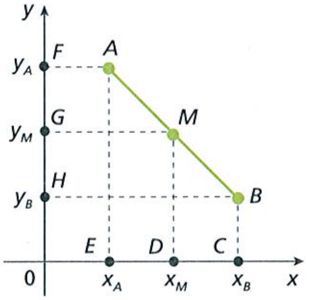
d) $(0, 6)$, $(0, 0)$ e $(6, 0)$

e) $(0, 12)$, $(0, 0)$ e $(3, 0)$

1.3 Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Para resolver alguns tipos de problema, precisamos dividir um segmento em outros dois de mesma medida. Vamos então aprender como determinar o ponto médio de um segmento.

Considere um segmento de extremos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ cujo ponto médio é $M(x_M, y_M)$. Assim, temos:



ADILSON SECCO

Pelo teorema de Tales, encontramos a seguinte relação entre as abscissas desses pontos:

$$AM = MB \Rightarrow ED = DC \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow 2x_M = x_B + x_A$$

Portanto:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Também, pelo teorema de Tales, encontramos a seguinte relação entre as ordenadas:

$$AM = MB \Rightarrow HG = GF \Rightarrow y_M - y_B = y_A - y_M \Rightarrow 2y_M = y_A + y_B$$

Portanto:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Observação

- Se $y_A = y_B = 0$, isto é, se $\overline{AB}$ está contido no eixo x, temos: $M\left(\frac{x_B + x_A}{2}, 0\right)$
- Se $x_A = x_B = 0$, isto é, se $\overline{AB}$ está contido no eixo y, temos: $M\left(0, \frac{y_B + y_A}{2}\right)$

Podemos concluir que, se tivermos um segmento de extremos A e B, a abscissa do ponto médio será a média aritmética das abscissas dos extremos e a ordenada do ponto médio será a média aritmética das ordenadas dos extremos.

Portanto, o **ponto médio** do segmento $\overline{AB}$ é dado por:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

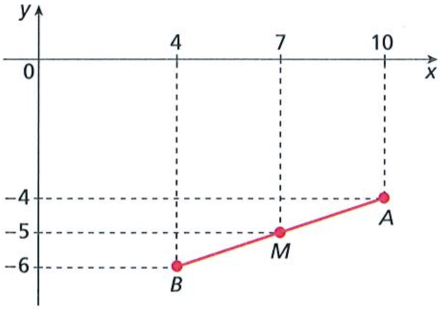
Exemplo

O ponto médio M do segmento $\overline{AB}$, sendo $A(10, -4)$ e $B(4, -6)$, tem as coordenadas dadas por:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{10 + 4}{2} = 7$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4 + (-6)}{2} = -5$$

Logo, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é $M(7, -5)$.



ADILSON SECCO

Reflita

Como faríamos para encontrar as coordenadas dos pontos que dividem um segmento em três segmentos de mesma medida?

Ver resolução no Guia do professor.

Exercícios resolvidos

R8. Determinar as coordenadas do ponto B sabendo que $M(-1, -1)$ é o ponto médio de $\overline{AB}$ com $A(-1, 1)$.

▸ ***Resolução***

Como $M(-1, -1)$ é o ponto médio de $\overline{AB}$, então $x_M = -1$ e $y_M = -1$.
Assim:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-1 + x_B}{2} \Rightarrow -1 + x_B = -2 \Rightarrow x_B = -1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{1 + y_B}{2} \Rightarrow 1 + y_B = -2 \Rightarrow y_B = -3$$

Logo, $B(-1, -3)$.

R9. Determinar o comprimento da mediana $\overline{AM}$ relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo cujos vértices são $A(2, 3)$, $B(4, -2)$ e $C(0, -6)$.

Observação

A mediana $\overline{AM}$ de um triângulo ABC é o segmento de extremidades no ponto A, vértice do triângulo, e no ponto M, ponto médio do lado $\overline{BC}$.

▸ ***Resolução***

As coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{BC}$ são:

$$x_M = \frac{4 + 0}{2} = 2$$

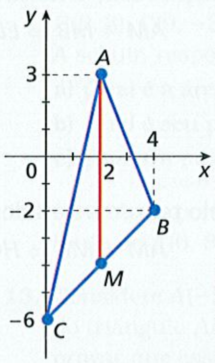
$$y_M = \frac{(-2) + (-6)}{2} = -4$$

Assim, o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ é $M(2, -4)$.

O comprimento da mediana é dado por:

$$d_{A,M} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (-4 - 3)^2} = \sqrt{49} = 7$$

Portanto, o comprimento da mediana $\overline{AM}$ é 7.



ADILSON SECCO

R10. Considere um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. Sabe-se que o baricentro G de um triângulo é o ponto de intersecção de suas três medianas. Determinar as coordenadas do baricentro $G(x_G, y_G)$.

▸ ***Resolução***

Considere o triângulo ABC ao lado.

Se $E(x_E, y_E)$ é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, temos:

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} \quad \text{(I) e } y_E = \frac{y_B + y_C}{2}$$

O baricentro G divide cada mediana em dois segmentos cujas medidas estão na razão de 2 para 1:

$$\frac{AG}{GE} = \frac{2}{1}$$

Considerando as abscissas dos pontos A, G e E, temos:

$$\frac{x_G - x_A}{x_E - x_G} = \frac{2}{1} \Rightarrow x_G - x_A = 2 \cdot (x_E - x_G) \Rightarrow 3x_G = x_A + 2x_E \quad \text{(II)}$$

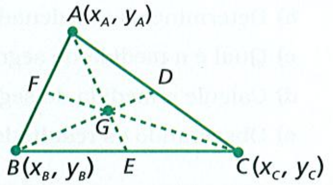
Substituindo (I) em (II), temos:

$$3x_G = x_A + 2\left(\frac{x_B + x_C}{2}\right) \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

De maneira análoga: $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Logo, o baricentro do triângulo ABC é o ponto:

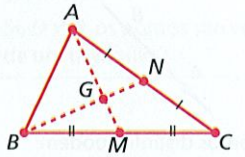
$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$



ADILSON SECCO

Reflita

No triângulo abaixo, sabemos que $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{NM}$ e que $AB = 2MN$. Como podemos verificar, por semelhança dos triângulos ABG e MNG, que G divide $\overline{BN}$, a partir de B, na razão 2 : 1?



ADILSON SECCO

Ver resolução no Guia do professor.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

21. Obtenha o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ nos seguintes casos:

a) $A(3, 2)$ e $B(5, 4)$ $M(4, 3)$

b) $A(-3, -4)$ e $B(-7, 0)$ $M(-5, -2)$

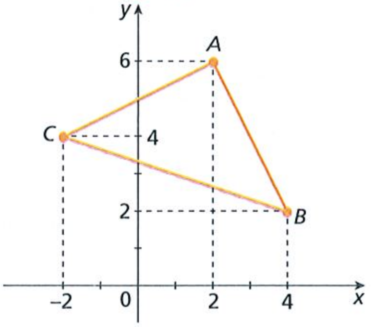
22. Seja $M(3, 3)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Calcule as coordenadas do ponto A sabendo que $B(4, 0)$. $A(2, 6)$

23. Sendo $A(4, 1)$, $B(2, 3)$, $C(-8, 7)$ e $D(-6, 5)$ vértices de um paralelogramo, determine o ponto de intersecção de suas diagonais. (Lembre que as diagonais de um paralelogramo se cruzam no ponto médio.) $M(-2, 4)$

24. Dado o triângulo ABC da figura abaixo, determine:

a) a medida da mediana $\overline{AM}$ relativa ao lado $\overline{BC}$; $\sqrt{10}$

b) o baricentro G. $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$



ADILSON SECCO

25. Determine os valores de x e y sabendo que $A(2, 4)$, $B(x, 5)$ e $C(5, y)$ são vértices de um triângulo cujo baricentro é o ponto $G(2, 3)$. $x = -1$ e $y = 0$

Ver resolução no Guia do professor.

26. Dados os pontos $A'(6, 2)$, $B'(2, 4)$ e $C'(4, -2)$, vértices de um triângulo, resolva os itens.

a) Represente os pontos A', B' e C' no plano cartesiano e trace o triângulo e suas medianas.

b) Calcule o comprimento das medianas desse triângulo.

c) Determine as coordenadas do baricentro G desse triângulo.

d) Compare as coordenadas dos pontos A', B' e C' desta questão com, respectivamente, os pontos A, B e C da questão **24**. O que ocorre com as coordenadas de A e A', B e B' e C e C' em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares?

e) Compare o baricentro e as respectivas coordenadas do triângulo desta questão com o baricentro do triângulo da questão **24**.

Ver resolução no Guia do professor.

27. Considere $A(-1, 3)$ e $B(0, 1)$ vértices adjacentes de um paralelogramo $ABCD$ e $M(1, 4)$ o ponto de intersecção de suas diagonais. Calcule:

a) as coordenadas dos vértices C e D e represente o paralelogramo no plano cartesiano;

b) o perímetro desse paralelogramo.

28. Determine as coordenadas dos vértices de um triângulo cujos pontos médios dos lados são $P(-1, 4)$, $Q(2, -1)$ e $R(-2, 2)$. $A(3, 1)$, $B(-5, 7)$ e $C(1, -3)$

29. Considere o triângulo *ABC*, retângulo em *A*, conforme mostra a figura ao lado. Ver resolução no Guia do professor.

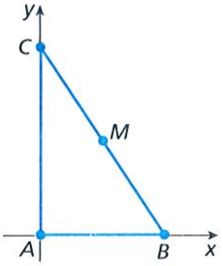
a) Quais são as coordenadas dos pontos *A*, *B* e *C*?

b) Determine as coordenadas de *M*, ponto médio da hipotenusa $\overline{BC}$.

c) Qual é a medida do segmento $\overline{CM}$?

d) Calcule a medida do segmento $\overline{AM}$.

e) Observando os resultados dos itens **c** e **d**, o que você pode concluir?

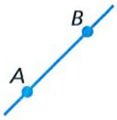


ADILSON SECCO

1.4 Condição de alinhamento de três pontos

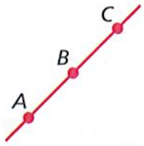
Observação

Dois pontos distintos estão sempre alinhados.

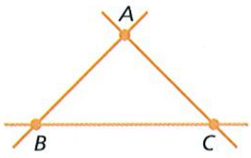


Três pontos distintos podem:

- estar alinhados; nesse caso dizemos que os pontos são **colineares**;



- determinar um **triângulo**.

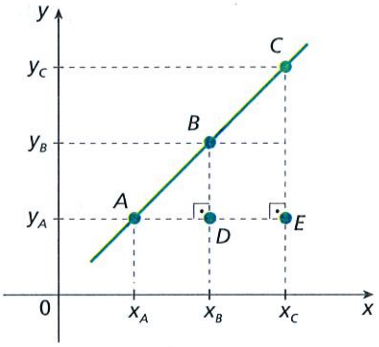


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Como já vimos, por dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, passa uma única reta, e eles estão sempre alinhados.

Agora veremos qual é a condição para que três pontos, dois a dois distintos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, pertençam a uma reta não paralela a algum dos eixos, isto é, estejam alinhados.

Observe a figura:



Os triângulos *ACE* e *ABD* são semelhantes. Assim:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EC}{DB} \Rightarrow \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}, \text{ com } x_B - x_A \neq 0 \text{ e } y_B - y_A \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_Cy_B - x_Cy_A - x_Ay_B + \cancel{x_Ay_A} - x_By_C + x_By_A + x_Ay_C - \cancel{x_Ay_A} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_Cy_B - x_Cy_A - x_Ay_B - x_By_C + x_By_A + x_Ay_C = 0$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por -1 e reordenando os termos, obtemos:

$$x_Ay_B + x_Cy_A + x_By_C - x_Cy_B - x_Ay_C - x_By_A = 0 \quad \text{(I)}$$

Vamos recordar o desenvolvimento, pela regra de Sarrus, do determinante abaixo. A seguir, vamos compará-lo com o primeiro membro da igualdade (I).

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_Ay_B + x_Cy_A + x_By_C - x_Cy_B - x_Ay_C - x_By_A$$

coluna das ordenadas dos pontos

coluna das abscissas dos pontos

Observação

A condição ao lado também é válida quando dois dos pontos coincidirem ou quando os pontos pertencerem a uma reta paralela a algum dos eixos.

Portanto, o primeiro termo da igualdade (I) é o determinante *D*.

Logo, se três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Neste caso, a recíproca também é verdadeira:

Se $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$, então os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados.

Três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, são colineares se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercícios resolvidos

R11. Verificar se os pontos $A(3, 2)$, $B(4, 1)$ e $C(1, 4)$ são colineares.

▸ ***Resolução***

Vamos calcular o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$D = 3 + 2 + 16 - 1 - 12 - 8$

$D = 21 - 21 \Rightarrow D = 0$

Como $D = 0$, os pontos são colineares.

R12. Determinar o valor de k para que os pontos $A(k, 7)$, $B(2, -3)$ e $C(k, 1)$ sejam os vértices de um triângulo.

▸ ***Resolução***

Para que A, B e C sejam os vértices de um triângulo, eles não podem estar alinhados. Assim:

$$\begin{vmatrix} k & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$-3k + 7k + 2 + 3k - k - 14 \neq 0$

$6k - 12 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$

Logo, para que os pontos $A(k, 7)$, $B(2, -3)$ e $C(k, 1)$ sejam vértices de um triângulo, devemos ter $k \neq 2$.

Observação

- Se $D = 0$, os pontos são colineares.
- Se $D \neq 0$, os pontos são vértices de um triângulo.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

30. Verifique se os pontos A, B e C estão alinhados.

a) $A(2, 3)$, $B(-2, -5)$ e $C(-1, -3)$ sim

b) $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ e $C(3, -1)$ não

31. Verifique para quais valores de x existe o triângulo ABC, sendo $A(x, 1)$, $B(x + 1, 2)$ e $C(0, 3)$. $x \neq -2$

32. Determine dois pontos que estejam alinhados com os pontos $A(1, 4)$ e $B(0, 3)$. Há infinitas possibilidades, como $P(-1, 2)$ e $Q(2, 5)$.

33. Determine m para que os pontos $A(-1, m)$, $B(2, -3)$ e $C(-4, 5)$:

a) estejam alinhados; $m = 1$

b) sejam vértices de um triângulo. $m \neq 1$

34. Determine uma relação entre as coordenadas de um ponto $P(x, y)$ para que ele esteja alinhado com $A(2, 3)$ e $B(5, 4)$. $x - 3y + 7 = 0$

35. (Insper-SP) Para que os pontos do plano cartesiano de coordenadas $(1; 1)$, $(a; 2)$ e $(2; b)$ estejam sobre uma mesma reta é necessário e suficiente que:

a) $ab = a - b$

b) $ab = a + b$

c) $ab = b - a$

d) $ab = a^2 - b^2$

e) $ab = a^2 + b^2$

alternativa b

36. A reta que contém os pontos $C(1, 3)$ e $D(2, 5)$ intercepta o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas, respectivamente, nos pontos A e B. Determine as coordenadas do ponto A e do ponto B.

$A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $B(0, 1)$

37. a) $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

37. Uma reta s passa pelos pontos $A(1, 1)$ e $B(-2, 4)$. Outra reta r passa pelos pontos $C(1, 3)$ e $D(-2, -6)$. Considerando essa informação, resolva os itens a seguir. Você pode fazer isso com um colega.

a) Determine o ponto $P(x, y)$ pertencente à intersecção das duas retas.

b) Explique como você encontrou esse ponto.

c) Represente os pontos e as retas no plano cartesiano, mostrando o ponto de intersecção. Ver resolução no Guia do professor.

38. O ponto $P(x_P, y_P)$ está alinhado com os pontos $A(5, 3)$ e $B(-2, 1)$. Verifique e registre que condições são necessárias para que:

Ver resolução no Guia do professor.

a) P pertença ao eixo x;

b) P pertença ao eixo y;

c) P pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares;

d) P pertença à bissetriz dos quadrantes pares;

e) $y_P = 2x_P$.

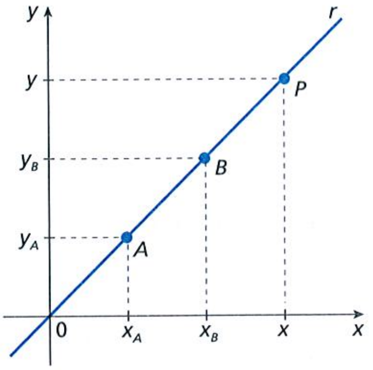
- Determine as coordenadas de P de acordo com as condições apresentadas em cada item.

2 A reta

2.1 Equação geral da reta

Dados dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pertencentes à reta r, vamos determinar uma relação entre as coordenadas de um ponto genérico, $P(x, y)$, também pertencente à reta r.

ADILSON SECCO



Pela condição de alinhamento para os pontos A, B e P, podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_Ay_B - x_By_A = 0$$

Como, nesse determinante, as únicas variáveis são x e y, os outros elementos são números reais conhecidos. Assim, podemos fazer:

$(y_A - y_B) = a$

$(x_B - x_A) = b$

$x_Ay_B - x_By_A = c$

Não sendo a e b simultaneamente nulos, obtemos a **equação geral da reta**:

$$ax + by + c = 0$$

Se $a = b = 0$, então $y_A = y_B$ e $x_A = x_B$, o que implica que os pontos A e B não sejam distintos (isso contradiz nossa hipótese inicial de que A e B são distintos).

Reflita

Por que temos de dizer que a e b não podem ser simultaneamente nulos?

Exercícios resolvidos

R13. Obter a equação geral da reta r que passa pelos pontos $A(-1, 3)$ e $B(3, 2)$.

Para $k \in \mathbb{R}$, não nulo, $k \cdot (x + 4y - 11) = 0$ representa uma "família" de equações da reta que passa por $A(-1, 3)$ e $B(3, 2)$. Embora, por conveniência, optamos pela equação que tenha os menores coeficientes inteiros, qualquer equação dessa "família" será considerada **a** equação geral da reta $\overline{AB}$.

▸ ***Resolução***

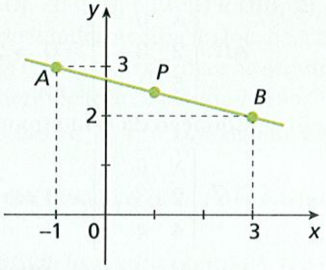
Considere um ponto $P(x, y)$ pertencente à reta r. Ele está alinhado com os pontos A e B.

Pela condição de alinhamento de três pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 3y - 2 - 9 - 2x + y = 0 \Rightarrow x + 4y - 11 = 0$$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é:

$x + 4y - 11 = 0$



ADILSON SECCO

R14. Verificar se o ponto $P(3, 2)$ pertence à reta s, cuja equação é $x - 3y + 3 = 0$.

▸ ***Resolução***

Para que o ponto $P(3, 2)$ pertença à reta s, suas coordenadas devem satisfazer a equação dessa reta.

Substituindo x por 3 e y por 2 na equação $x - 3y + 3 = 0$, temos:

$3 - 3 \cdot 2 + 3 = 0$

$3 - 6 + 3 = 0$

$0 = 0$

Portanto, o ponto P pertence à reta s de equação $x - 3y + 3 = 0$.

R15. Obter a equação geral da reta r, que passa pelos pontos $A(3, 1)$ e $B(2, 4)$, e determinar os seus pontos de intersecção com os eixos x e y.

▸ ***Resolução***

Seja $P(x, y)$ um ponto pertencente à reta r de tal maneira que os pontos A, B e P estejam alinhados. Então:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x + 2y + 12 - 2 - 4x - 3y = 0$

$-3x - y + 10 = 0$

Portanto, a equação geral da reta r é $-3x - y + 10 = 0$.

Vamos determinar agora os pontos de intersecção da reta r com os eixos x e y.

A reta r intercepta o eixo x no ponto $P(p, 0)$. Substituindo as coordenadas do ponto P na equação geral de r, temos:

$P(p, 0) \in r$

$-3p - 0 + 10 = 0$

$p = \dfrac{10}{3}$

Analogamente, a reta r intercepta o eixo y no ponto $Q(0, q)$. Substituindo as coordenadas do ponto Q em r, temos:

$Q(0, q) \in r$

$-3 \cdot 0 - q + 10 = 0$

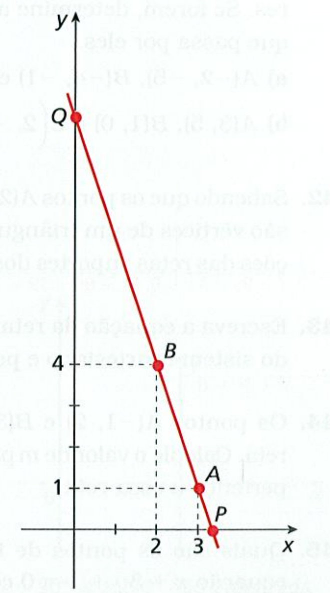
$q = 10$

Logo, a reta r intercepta o eixo x no ponto $P\left(\dfrac{10}{3}, 0\right)$ e o eixo y no ponto $Q(0, 10)$.

Reflita

Quais são as equações das retas dos eixos x e y?

eixo x: $y = 0$
eixo y: $x = 0$



ADILSON SECCO

R16. Os pontos $A(2, 3)$, $B(5, 1)$ e $C(4, 4)$ são os vértices de um triângulo. Determinar as equações das retas suportes dos lados desse triângulo.

Observação

Retas suportes dos lados de um triângulo são as retas que contêm os lados do triângulo.

▶ ***Resolução***

Equação da reta suporte do segmento $\overline{AB}$:

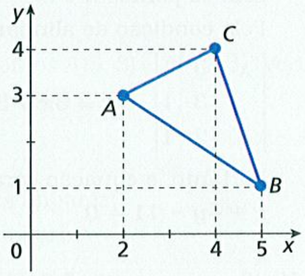
$$\overleftrightarrow{AB}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 13 = 0$$

Equação da reta suporte do segmento $\overline{AC}$:

$$\overleftrightarrow{AC}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 2y - 4 = 0$$

Equação da reta suporte do segmento $\overline{BC}$:

$$\overleftrightarrow{BC}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x - y + 16 = 0$$



ADILSON SECCO

Logo, as equações das retas suportes dos lados do triângulo ABC são:
$2x + 3y - 13 = 0$, $-x + 2y - 4 = 0$ e $-3x - y + 16 = 0$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

39. Verifique se cada ponto abaixo pertence à reta s, cuja equação é $x - y + 2 = 0$.

a) $A(2, 3)$ não

b) $B(1, 3)$ sim

40. Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos dados.

a) $A(3, 2)$ e $B(2, 1)$ $x - y - 1 = 0$

b) $A(0, 2)$ e $B(6, 0)$ $x + 3y - 6 = 0$

41. Em cada caso, verifique se os pontos são colineares. Se forem, determine a equação geral da reta que passa por eles.

a) $A(-2, -5)$, $B(-4, -1)$ e $C(4, 3)$ não

b) $A(3, 5)$, $B(1, 0)$ e $C\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$ sim; $5x - 2y - 5 = 0$

42. Sabendo que os pontos $A(2, 3)$, $B(5, -1)$ e $C(-1, 4)$ são vértices de um triângulo, determine as equações das retas suportes dos lados desse triângulo.
$x + 3y - 11 = 0$, $5x + 6y - 19 = 0$ e $4x + 3y - 17 = 0$

43. Escreva a equação da reta que passa pela origem do sistema cartesiano e pelo ponto $A(2, -1)$.
$x + 2y = 0$

44. Os pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 4)$ determinam uma reta. Calcule o valor de m para que o ponto $C(1, m)$ pertença a essa reta. 3

45. Quais são os pontos de intersecção da reta de equação $x + 3y + 1 = 0$ com os eixos x e y?
$\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$ e $(-1, 0)$

46. Considere os pontos $A(2, 3)$, $B(5, -1)$, $C(-1, 4)$ e $D(2, 3)$. Determine: Ver resolução no Guia do professor.

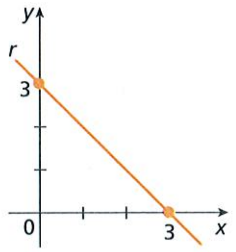
a) a equação geral da reta suporte do segmento $\overline{AB}$;

b) a equação geral da reta suporte do segmento $\overline{CD}$;

c) o ponto de intersecção entre as retas obtidas nos itens anteriores.

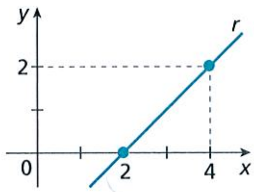
47. Determine a equação geral da reta r em cada caso.

a)



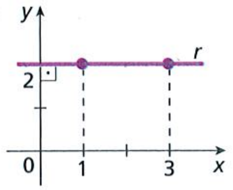
$x + y - 3 = 0$

b)



$x - y - 2 = 0$

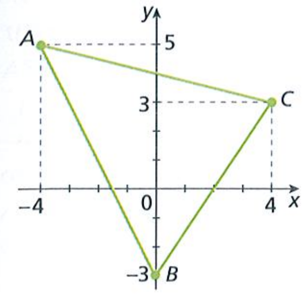
c)



$y - 2 = 0$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

48. Considere o seguinte triângulo *ABC*:



ADILSON SECCO

Identifique as coordenadas dos vértices do triângulo *ABC* e determine as equações das retas suportes: Ver resolução no Guia do professor.

a) dos lados desse triângulo;

b) das medianas desse triângulo;

c) dos três segmentos determinados pelos pontos médios dos lados desse triângulo.

49. (UFPB) Um ornitólogo, para observar o comportamento de uma determinada espécie de pássaro, instalou numa região quatro câmeras em pontos distintos. Para facilitar o seu estudo, representou esses pontos em um sistema de coordenadas cartesianas por $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(2, 2)$ e $D(0, 2)$, o que despertou curiosidades acerca da localização das câmeras. Nesse contexto, considere as seguintes proposições, identificando as verdadeiras.

(01) Dentre os pontos *A*, *B*, *C* e *D*, existem três alinhados.

(02) Os pontos *A*, *C* e *D* são vértices de um triângulo retângulo.

(04) O ponto *D* é equidistante dos pontos *A*, *B* e *C*.

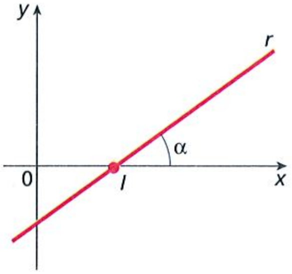
(08) O ponto *B* é equidistante dos pontos *A* e *C*.

(16) Uma equação da reta que passa pelos pontos *B* e *D* é $x + y + 2 = 0$.

- Qual é a soma das alternativas corretas?
  $1 + 2 + 8 = 11$

2.2 Inclinação e coeficiente angular de uma reta

Observe a figura:



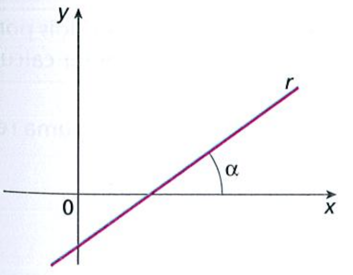
ADILSON SECCO

A medida α do ângulo indicado acima é chamada de **inclinação da reta** e é obtida girando-se o eixo *x* no sentido anti-horário em torno do ponto *I* ($0° \leqslant \alpha < 180°$ ou $0 \leqslant \alpha < \pi$) até ele coincidir com a reta *r*.

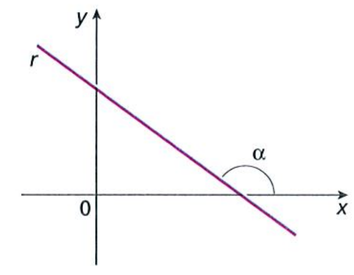
Chamamos de **coeficiente angular** ou **declividade** de uma reta, não perpendicular ao eixo *x*, o número real *m* expresso pela tangente trigonométrica de sua inclinação, ou seja:

$$m = \text{tg}\ \alpha$$

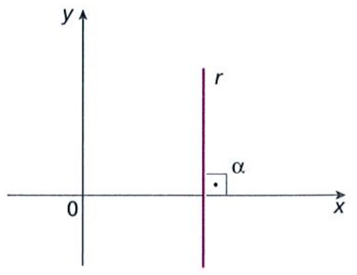
Observe as possibilidades para o ângulo α:



$0° \leqslant \alpha < 90° \Rightarrow m \geqslant 0$



$90° < \alpha < 180° \Rightarrow m < 0$



$\alpha = 90° \Rightarrow$ tg 90° não é definida

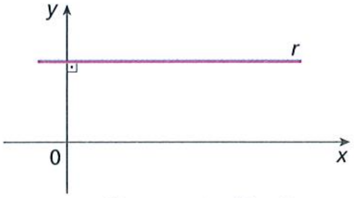
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

Se o coeficiente angular de uma reta *r*:

- é zero, dizemos que *r* é uma **reta horizontal.**
- não está definido, dizemos que *r* é uma **reta vertical.**

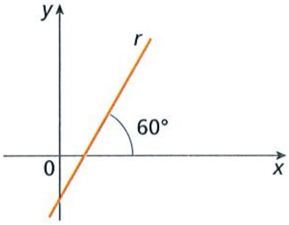
Quando a reta é paralela ao eixo *x*, admitimos que a sua inclinação é 0°. Logo, o seu coeficiente angular é $m = 0$.



$\alpha = 0° \Rightarrow m = \text{tg } 0° = 0$

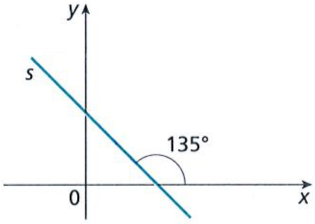
Exemplos

a) A reta *r* abaixo possui 60° de inclinação.



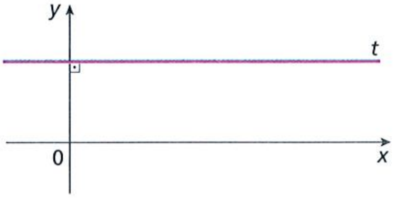
Logo, o seu coeficiente angular é dado por:
$m = \text{tg } 60° \Rightarrow m = \sqrt{3}$

b) A reta *s* abaixo possui 135° de inclinação.



Logo, o seu coeficiente angular é dado por:
$m = \text{tg } 135° \Rightarrow m = -1$

c) A reta *t* é paralela ao eixo *x*, logo a sua inclinação é 0°.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Portanto, o seu coeficiente angular é dado por:
$m = \text{tg } 0° \Rightarrow m = 0$

Quando não conhecemos o ângulo de inclinação, mas conhecemos dois pontos distintos pertencentes à reta, podemos encontrar o coeficiente angular calculando tg α por meio das coordenadas dos pontos.

Considere dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pertencentes a uma reta *r* não paralela ao eixo *y* e formando com o eixo *x* um ângulo α.

O coeficiente angular da reta *r* é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Demonstração

- 1º caso: $0° < \alpha < 90°$

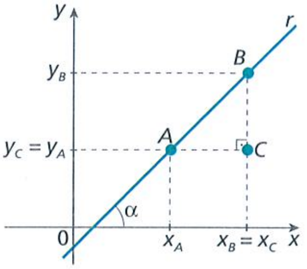
Considere o triângulo ABC como mostra a figura.

O triângulo ABC é retângulo em C. Logo:

$$m = \text{tg}\ \alpha = \frac{d_{C,\,B}}{d_{A,\,C}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Portanto, o coeficiente angular m é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



- 2º caso: $90° < \alpha < 180°$

Considere o triângulo ABC como mostra a figura.

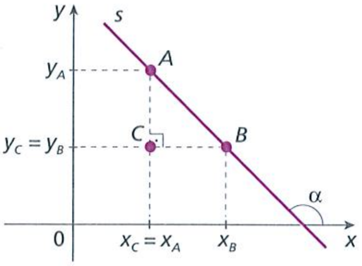
O triângulo ABC é retângulo em C. Logo:

$$m = \text{tg}\ \alpha = -\text{tg}\ (180° - \alpha) = -\frac{d_{C,\,A}}{d_{C,\,B}} =$$

$$= -\frac{(y_A - y_B)}{(x_B - x_A)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Portanto, o coeficiente angular m é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Podemos verificar que $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ vale também quando $\alpha = 0°$ pois $y_B = y_A$ e $x_B \neq x_A$, logo $m = 0$.

Portanto, para qualquer α, $\alpha \neq$ de $90°$ e $0° \leqslant \alpha < 180°$, temos: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exercícios resolvidos

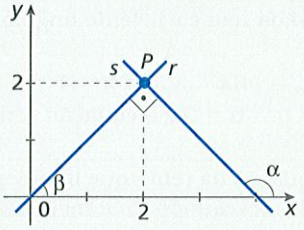
R17. Determinar o coeficiente angular da reta r que passa pelos pontos $A(2, 3)$ e $B(4, 9)$.

▶ ***Resolução***

O coeficiente angular é dado por: $m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9 - 3}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$

Logo, o coeficiente angular da reta r é 3.

R18. Calcular o valor de $m_r \cdot m_s$ sabendo que m_r e m_s correspondem, respectivamente, ao coeficiente angular das retas r e s apresentadas na figura.



ADILSON SECCO

▶ ***Resolução***

Coeficiente angular da reta r: $m_r = \frac{y_P - y_0}{x_P - x_0} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$

Note que $m_r = \text{tg}\ \beta = 1 \Rightarrow \beta = 45°$. Pela propriedade do ângulo externo, temos: $\alpha = \beta + 90° \Rightarrow \alpha = 45° + 90° \Rightarrow \alpha = 135°$

Então, $m_s = \text{tg}\ 135° = -1$ e $m_r \cdot m_s = 1 \cdot (-1) = -1$

Portanto, $m_r \cdot m_s = -1$.

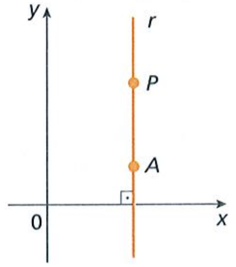
Observação

Em todo triângulo, a medida de cada ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

2.3 Equação da reta de coeficiente angular m e que passa por um ponto $A(x_A, y_A)$

Observação

Se $x = x_A$, então a reta r é paralela ao eixo y.

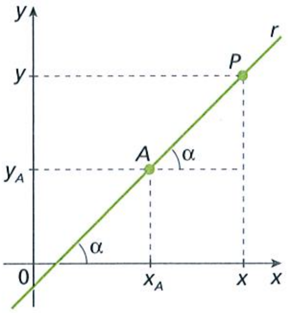


Neste caso, $x = x_A$ é a equação de r e, como já vimos, r é denominada reta vertical.

Já vimos como determinar a equação de uma reta conhecendo dois de seus pontos. Agora, vamos determinar a equação de uma reta r conhecendo um de seus pontos, $A(x_A, y_A)$, e seu coeficiente angular m.

Considere o ponto $P(x, y)$ na reta r, sendo $P \neq A$ e $m = \text{tg}\ \alpha$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO



Como $m = \text{tg}\ \alpha$, então: $m = \dfrac{y - y_A}{x - x_A}$

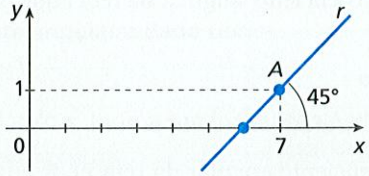
Portanto, a equação de uma reta que passa por $A(x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

Exercícios resolvidos

R19. Observar a figura e obter a equação da reta r que passa pelo ponto A e tem inclinação de 45°.

ADILSON SECCO



▸ ***Resolução***

Para determinar a equação da reta r, é preciso encontrar o coeficiente angular m: $m = \text{tg}\ \alpha \Rightarrow m = \text{tg}\ 45° \Rightarrow m = 1$

A reta procurada tem coeficiente angular $m = 1$ e passa pelo ponto $A(7, 1)$.

Assim: $y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = 1 \cdot (x - 7) \Rightarrow x - y - 6 = 0$

Portanto, $x - y - 6 = 0$ é a equação geral da reta r.

R20. Determinar a equação da reta r que intercepta o eixo y no ponto $P(0, 1)$ e intercepta o eixo x segundo uma inclinação de 150°.

Observação

$\text{tg}\ 150° = -\text{tg}\ 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

▸ ***Resolução***

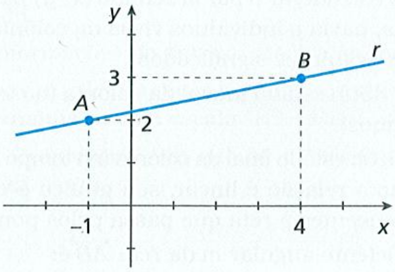
Como $m = \text{tg}\ 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $P(0, 1)$ pertence à reta r, temos:

$$y - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow \sqrt{3}x + 3y - 3 = 0$$

Portanto, a equação da reta r é:

$\sqrt{3}x + 3y - 3 = 0$

R21. Determinar a equação da reta *r* representada no plano cartesiano a seguir.



ADILSON SECCO

▸ ***Resolução***

Além do método da condição de alinhamento usando determinante, esse problema pode ser resolvido com o estudo do coeficiente angular da reta.

Considerando que as coordenadas dos pontos *A* e *B* são, respectivamente, $(-1, 2)$ e $(4, 3)$, vamos calcular o coeficiente angular da reta determinada por *A* e *B*:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{4-(-1)} = \frac{1}{5}$$

A reta procurada tem coeficiente angular $m = \frac{1}{5}$ e passa pelo ponto $B(4, 3)$. Assim:

$$y - 3 = \frac{1}{5}(x-4) \Rightarrow 5y - 15 = x - 4 \Rightarrow x - 5y + 11 = 0$$

Portanto, $x - 5y + 11 = 0$ é a equação geral da reta *r*.

Reflita Sim. Espera-se que o aluno perceba que, conhecendo o coeficiente angular da reta, é possível obter sua equação a partir de qualquer um de seus pontos.

No **R21**, poderíamos determinar a reta usando $m = \frac{1}{5}$ e $A(-1, 2)$?

R22. Sabendo que a inclinação da reta que passa pelos pontos $A(k, 2)$ e $B(-1, 3)$ é 45°, determinar o valor de *k* e a equação dessa reta.

▸ ***Resolução***

O coeficiente angular é: $m = \text{tg } 45° \Rightarrow m = 1$

Portanto:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow 1 = \frac{3-2}{-1-k} \Rightarrow k = -2$$

A reta tem coeficiente angular $m = 1$ e passa por $A(-2, 2)$.

Assim:

$$y - 2 = 1(x + 2)$$

$$x - y + 4 = 0$$

Portanto, $x - y + 4 = 0$ é a equação geral da reta que passa pelos pontos *A* e *B*.

Reflita Sim. Espera-se que o aluno perceba que, conhecendo o coeficiente angular da reta, é possível obter sua equação a partir de qualquer um de seus pontos.

No **R22**, também poderíamos determinar a reta usando $m = 1$ e $B(-1, 3)$?

R23. Um laboratório estudou uma colônia de bactérias composta por 350 indivíduos vivos. Verificou-se que, após a aplicação de certa droga, o número de indivíduos vivos na colônia diminuía com o tempo, sendo que, após 25 horas, não havia mais nenhum indivíduo vivo na colônia. Supondo que o número *y* de indivíduos vivos varie linearmente com o tempo *x* de vida, contado a partir da administração da droga, pede-se:

a) determinar a expressão que relaciona *y* a *x*;

b) o número de indivíduos que permaneciam vivos após 10 horas do início do experimento.

Resolução

a) Vamos considerar o par ordenado (x, y) para identificar que, após x horas, havia y indivíduos vivos na colônia. Assim, temos pontos com os seguintes significados:

- $A(0, 350)$: estado inicial da colônia (no tempo 0 h, havia 350 indivíduos)
- $B(25, 0)$: estado final da colônia (no tempo 25 h, havia 0 indivíduo). Como a relação é linear, seu gráfico é um conjunto de pontos pertencentes à reta que passa pelos pontos A e B.

O coeficiente angular m da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$$m = \frac{0 - 350}{25 - 0} = -14$$

A reta tem coeficiente angular $m = -14$ e passa por $B(25, 0)$. Assim:

$y - 0 = -14(x - 25)$

$y = -14x + 350$

b) Para obter o número de indivíduos vivos após 10 horas do início do experimento, basta substituir x por 10 na igualdade $y = -14x + 350$.

Assim:

$y = -14 \cdot 10 + 350 = 210$

Portanto, após 10 horas, havia 210 indivíduos vivos na colônia de bactérias.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

50. Determine, se existir, o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos:

a) $A(-1, 2)$ e $B(-1, 5)$ não existe

b) $A(3, 0)$ e $B(4, 0)$ 0

c) $A(1, 2)$ e $B(-2, -1)$ 1

d) $A\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{7}\right)$ e $B(0, 0)$ $-\frac{\sqrt{2}}{14}$

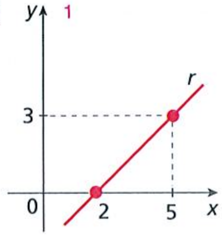
51. Dados os pontos A e B de uma reta e seu coeficiente angular, determine o valor de k nos seguintes casos:

a) $A(2, 2)$, $B(k, 3)$ e $m = \frac{1}{2}$ $k = 4$

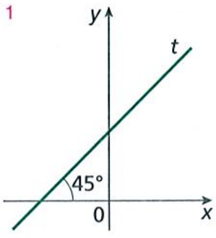
b) $A\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$, $B(2, k)$ e $m = \frac{6}{5}$ $k = 6$

52. Calcule o coeficiente angular das retas representadas abaixo.

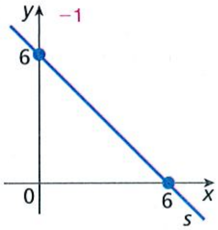
a) 1



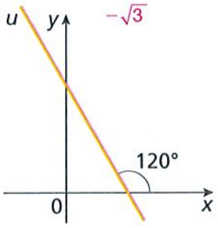
b) 1



c) -1



d) $-\sqrt{3}$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

53. Escreva a equação da reta r que passa pelo ponto $A(1, -6)$ e forma com o eixo das abscissas um ângulo de 60°. $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} - 6 = 0$

54. Seja r a reta determinada pelos pontos $A(k, 4)$ e $B(0, 1)$, com coeficiente angular $m = 3$. Obtenha:

a) o valor de k; $k = 1$

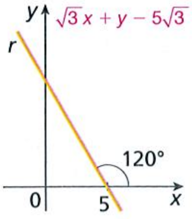
b) a equação da reta; $3x - y + 1 = 0$

c) o ponto de intersecção da reta r com o eixo x; $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

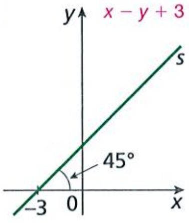
d) o ponto de intersecção da reta r com o eixo y. $(0, 1)$

55. Determine as equações das retas representadas abaixo.

a) $\sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0$



b) $x - y + 3 = 0$



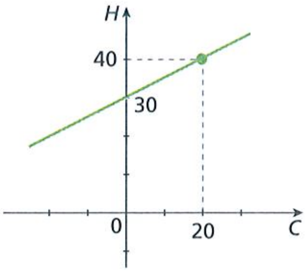
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

56. Um cientista inventou uma escala para termômetro e a chamou de escala H (°H). Relacionando-a com a escala Celsius (°C), obteve o gráfico representado ao lado.

Considerando as informações do gráfico, resolva os seguintes itens.

a) Quando a temperatura de um corpo for 70 °C, qual será a temperatura indicada pelo termômetro com escala °H? 65 °H

b) Calcule a única temperatura em que há coincidência de valores em ambas as escalas. 60 °C ou 60 °H

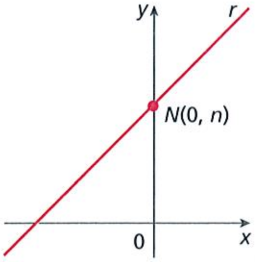


ADILSON SECCO

2.4 Equação reduzida da reta

Sabemos que a equação da reta r que passa por um ponto $A(x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é dada por $y - y_A = m(x - x_A)$.

Como a reta r intercepta o eixo y no ponto $N(0, n)$, temos:



ADILSON SECCO

$$y - n = m(x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow \boxed{y = mx + n}$$

A forma $y = mx + n$ é denominada **equação reduzida da reta**, em que m é o coeficiente angular da reta e n é a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo y.

Podemos fazer uma analogia entre a equação reduzida da reta e a função afim:

Equação reduzida da reta	Função afim
$y = mx + n$	$f(x) = ax + b$

Reflita

Por que a equação reduzida não pode ser usada para as retas paralelas ao eixo y?

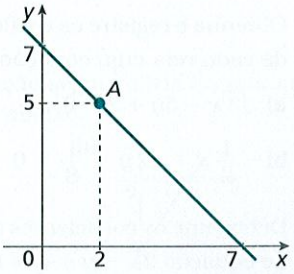
Espera-se que os alunos percebam que nesse caso $\alpha = 90°$, então temos $m = \text{tg } 90°$, que não é definida.

Observe que $m = \text{tg } \alpha = a$, então: se $m > 0$ $(0° < \alpha < 90°)$, a função afim é **crescente**; se $m < 0$ $(90° < \alpha < 180°)$, a função afim é **decrescente**; se $m = 0$ $(\alpha = 0°)$, a função afim é **constante**.

Observe também que $n = b$ é a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo y, também chamado de **coeficiente linear** da reta.

Exercícios resolvidos

R24. Escrever na forma reduzida a equação da reta que passa pelo ponto $A(2, 5)$ e tem coeficiente angular $m = -1$.



ADILSON SECCO

▸ ***Resolução***

Como $m = -1$ e $A(2, 5)$, temos:

$y - y_A = m(x - x_A)$

$y - 5 = -1(x - 2) \Rightarrow y - 5 = -x + 2 \Rightarrow y = -x + 7$

Portanto, a equação reduzida da reta que passa pelo ponto $A(2, 5)$ e tem coeficiente angular $m = -1$ é $y = -x + 7$.

R25. Determinar os coeficientes linear e angular da reta de equação $6x - 5y - 30 = 0$.

▶ ***Resolução***

Para determinar os coeficientes linear e angular da reta, basta isolar y em: $6x - 5y - 30 = 0$

Assim:

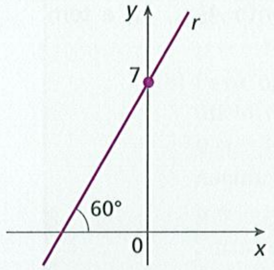
$$6x - 5y - 30 = 0 \Rightarrow -5y = -6x + 30 \Rightarrow y = \frac{6}{5}x - 6$$

Comparando a equação acima com a equação reduzida da reta, temos o coeficiente linear -6 e o coeficiente angular $\frac{6}{5}$.

Observação

Na prática, para obter o coeficiente linear, basta fazer $x = 0$ na equação da reta.
O valor obtido para a ordenada y é o coeficiente linear.

R26. Dada a representação gráfica da reta *r*, determinar sua equação reduzida.



ADILSON SECCO

▶ ***Resolução***

Observando a figura, temos:

$n = 7$ (ordenada do ponto de intersecção de r com o eixo y)

Como $\alpha = 60°$, temos:

$m = \text{tg } 60°$

$m = \sqrt{3}$

Substituindo $m = \sqrt{3}$ e $n = 7$ na equação $y = mx + n$, temos:

$y = \sqrt{3}x + 7$

Portanto, a equação reduzida de r é $y = \sqrt{3}x + 7$.

É correto para comparações entre ângulos α tais que $0° \leqslant \alpha < 90°$ ou $90° < \alpha < 180°$.

Reflita

É correto dizer que, quanto maior for o ângulo α, maior será o valor de m?

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

57. Determine a equação reduzida da reta *r* que tem:

a) coeficiente angular $m = \frac{1}{2}$ e passa pelo ponto $A\left(\frac{2}{3}, 1\right)$; $y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$

b) coeficiente angular $m = -\frac{1}{2}$ e passa pelo ponto $A\left(1, \frac{2}{3}\right)$. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{6}$

58. Obtenha e registre os coeficientes linear e angular de cada reta cuja equação é dada a seguir:

a) $\sqrt{3}x - 5y + 2 = 0$ $m = \frac{\sqrt{3}}{5}$; $n = \frac{2}{5}$

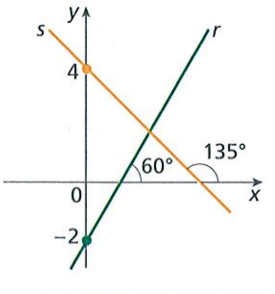
b) $-\frac{1}{2}x + \sqrt{2}y - \frac{1}{8} = 0$ $m = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $n = \frac{\sqrt{2}}{16}$

59. Determine os coeficientes angular e linear da reta de equação $2x - y + 3 = 0$. 2 e 3

60. Escreva a equação da reta que passa pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(1, 3)$ na forma reduzida. $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

61. O valor de um número real x vai aumentar 30%, dando um resultado y. Expresse y em função de x e represente graficamente essa função. Qual é a inclinação da reta que representa essa função?
Ver resolução no Guia do professor.

62. Determine as equações reduzidas das retas r e s mostradas na figura. $y = \sqrt{3}x - 2$ e $y = -x + 4$



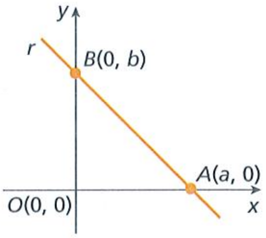
ADILSON SECCO

2.5 Equação segmentária da reta

Seja r uma reta que intercepta o eixo x em $A(a, 0)$ e o eixo y em $B(0, b)$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

A equação geral da reta r é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow bx + ay = ab$$



ADILSON SECCO

Dividindo os dois membros da equação por ab, temos:

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

A forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ é denominada **equação segmentária da reta.**

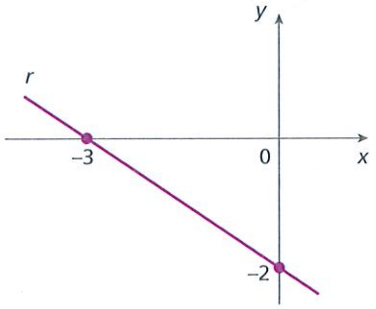
Observe que a abscissa de A (ponto em que a reta intercepta o eixo x) e a ordenada de B (ponto em que a reta intercepta o eixo y) aparecem explicitamente na equação segmentária da reta.

Observação

Note que a e b são medidas algébricas dos segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, daí o nome de equação segmentária.

Exemplos

a) Determinar a equação segmentária da reta representada abaixo.



ADILSON SECCO

Como a reta r intercepta os eixos em $(-3, 0)$ e $(0, -2)$, temos:

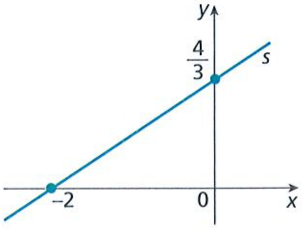
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$$

Portanto, $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$ é a equação segmentária da reta r.

b) Determinar a equação segmentária da reta cuja equação geral é $2x - 3y + 4 = 0$.

$$2x - 3y + 4 = 0 \Rightarrow 2x - 3y = -4 \Rightarrow \frac{2x}{-4} - \frac{3y}{-4} = \frac{-4}{-4} \Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{4}{3}} = 1$$

Portanto, $\frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{4}{3}} = 1$ é a equação segmentária da reta s.



ADILSON SECCO

64. $(6, 0)$; $(0, 9)$; $\frac{x}{6} + \frac{y}{9} = 1$

Exercícios propostos

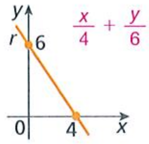
Registre as respostas em seu caderno

63. Escreva na forma segmentária a equação da reta que passa pelos pontos $A(4, 0)$ e $B(0, 7)$. $\frac{x}{4} + \frac{y}{7} = 1$

64. Dada a equação geral $3x + 2y - 18 = 0$ de uma reta, obtenha os pontos de intersecção dessa reta com os eixos x e y e sua equação segmentária.

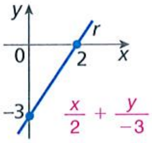
65. Determine a equação segmentária da reta r indicada nos gráficos abaixo.

a)



$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$

b)



$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2.6 Equações paramétricas da reta

Já vimos que a equação de uma reta pode aparecer nas formas geral, reduzida ou segmentária. Agora vamos conhecer a forma paramétrica e aprender a representar uma reta por meio de **equações paramétricas**.

Equações paramétricas de uma reta são aquelas que não relacionam diretamente as coordenadas x e y. Tais equações são dadas em função de uma terceira variável, t, chamada **parâmetro**: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, em que f e g são funções afins.

Exemplos

a) Determinar a equação geral de r definida por: $\begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = t - 3 \end{cases}$

Vamos isolar t na primeira equação:

$$x = 2t + 4 \Rightarrow t = \frac{x - 4}{2}$$

Substituindo t por $\frac{x-4}{2}$ na segunda equação, temos:

$$y = \left(\frac{x-4}{2}\right) - 3 \Rightarrow x - 2y - 10 = 0$$

Portanto, $x - 2y - 10 = 0$ é a equação geral da reta r.

Observação

$$y = \left(\frac{x-4}{2}\right) - 3$$

$$y = \frac{x}{2} - 2 - 3$$

$$2y = x - 10$$

$$x - 2y - 10 = 0$$

b) Considerar a reta r cuja equação geral é $3x - 2y - 6 = 0$.

- Determinar um par de equações paramétricas da reta r.
  Vamos isolar x na equação:

$$3x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 2y + 6 \Rightarrow x = \frac{2}{3}y + 2 \Rightarrow x = 2\left(\frac{y}{3} + 1\right)$$

Fazendo $\frac{y}{3} + 1 = t$, obtemos: $x = 2t$ e $y = 3t - 3$

Portanto, a reta r é definida por: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t - 3 \end{cases}$

- Obter as coordenadas do ponto P de r tal que $t = -4$.

Para $t = -4$, temos: $\begin{cases} x = 2 \cdot (-4) = -8 \\ y = 3 \cdot (-4) - 3 = -15 \end{cases}$

Portanto, $P(-8, -15)$.

Observação

A escolha $\frac{y}{3} + 1 = t$ é arbitrária, pois há outras possibilidades. Por exemplo, para $\frac{2}{3}y = t$, temos $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = \frac{3}{2}t \end{cases}$, que também representa a reta r.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

66. Determine um par de equações paramétricas das retas de equação:

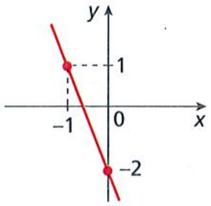
a) $x + 5y - 3 = 0$

b) $x - 2y + 7 = 0$

Respostas possíveis: a) $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = -\frac{t}{5} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = t - 7 \\ y = \frac{t}{2} \end{cases}$

67. Escreva um par de equações paramétricas da reta representada a seguir.

Resposta possível: $\begin{cases} x = t - \frac{2}{3} \\ y = -3t \end{cases}$



ADILSON SECCO

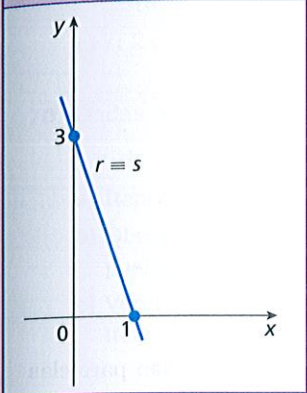
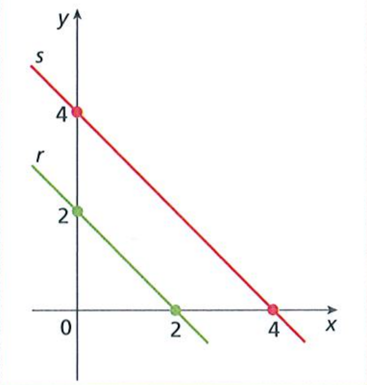
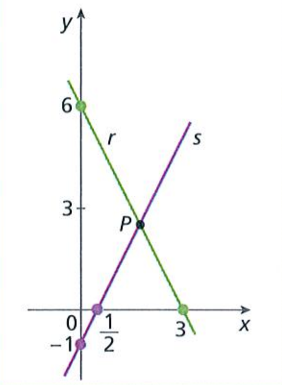
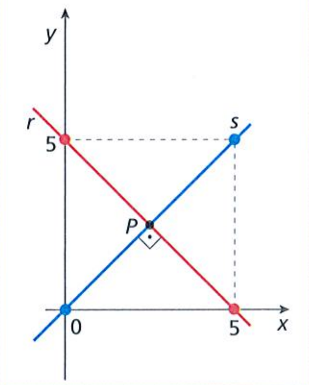
68. Dadas as equações paramétricas $\begin{cases} x = 4t \\ y = 5t \end{cases}$ da reta r, determine sua equação nas formas:

a) geral; $5x - 4y = 0$ **b)** reduzida; $y = \frac{5}{4}x$ **c)** segmentária. $\nexists$

3 Posição relativa entre duas retas no plano

Vimos como obter a equação de uma reta nas formas geral, reduzida, segmentária ou paramétrica e como representar essa reta no plano cartesiano.

Considere agora duas retas, *r* e *s*, e suas respectivas equações.

Retas paralelas		Retas concorrentes	
Coincidentes	**Distintas**	**Não perpendiculares**	**Perpendiculares**
			
$r: 3x + y - 3 = 0$ $s: 6x + 2y - 6 = 0$	$r: x + y - 2 = 0$ $s: x + y - 4 = 0$	$r: 2x + y - 6 = 0$ $s: -2x + y + 1 = 0$	$r: x + y - 5 = 0$ $s: -x + y = 0$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Na Geometria sabemos que duas retas coplanares podem ser classificadas em coincidentes, paralelas distintas ou concorrentes, sendo as retas perpendiculares um caso particular das retas concorrentes.

Mas como saber qual a posição relativa entre duas retas, *r* e *s*, conhecendo apenas as equações que as definem?

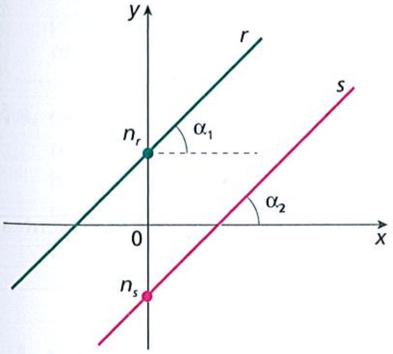
Veremos adiante quais condições permitem determinar a posição relativa entre duas retas por meio dos coeficientes angulares e/ou lineares.

3.1 Condição de paralelismo de duas retas

Duas retas *r* e *s* são paralelas quando têm a mesma direção.

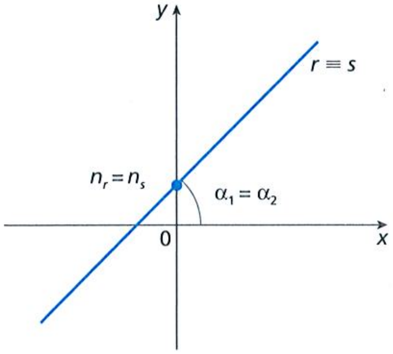
Vamos verificar as condições para que as retas *r* e *s*, de coeficientes angulares m_r e m_s e coeficientes lineares n_r e n_s, sejam paralelas.

Lembrando que retas paralelas podem ser distintas ou coincidentes, temos:



Para que as retas *r* e *s* sejam **paralelas distintas**, devem satisfazer a seguinte condição:

$$m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s$$



Para que as retas *r* e *s* sejam **paralelas coincidentes**, devem satisfazer a seguinte condição:

$$m_r = m_s \text{ e } n_r = n_s$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

Se m_r e m_s não estão definidos, então *r* e *s* são retas verticais, isto é, paralelas ao eixo *y*, portanto são paralelas entre si.

Exercícios resolvidos

R27. Determinar a posição da reta r, de equação $x + 2y - 6 = 0$, em relação à reta s, de equação $3x + 6y - 5 = 0$.

▶ ***Resolução***

Primeiro vamos determinar os coeficientes angular e linear de r e s usando as equações na forma reduzida.

Para a reta r, temos:

$$x + 2y - 6 = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Portanto:

$$m_r = -\frac{1}{2} \text{ e } n_r = 3$$

Para a reta s, temos:

$$3x + 6y - 5 = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$$

Portanto:

$$m_s = -\frac{1}{2} \text{ e } n_s = \frac{5}{6}$$

Como $m_r = m_s = -\frac{1}{2}$ e $n_r \neq n_s$, então as retas r e s são paralelas distintas.

R28. Dado o ponto $P(2, 1)$, obter a equação reduzida da reta s que passa por P e é paralela à reta r de equação $2x - y + 7 = 0$.

▶ ***Resolução***

Para que as retas r e s sejam paralelas, é necessário que seus coeficientes angulares sejam iguais. Assim:

$$m_r = m_s = 2$$

Como o ponto P pertence à reta s, temos:

$$y = m_s \cdot x + n_s \Rightarrow 1 = 2 \cdot 2 + n_s \Rightarrow n_s = -3$$

Portanto, a equação reduzida da reta s, paralela à reta r, é $y = 2x - 3$.

Observação

A equação reduzida da reta r é:

$2x - y + 7 = 0 \Rightarrow y = 2x + 7$

Portanto, $m_r = 2$.

R29. Calcular o valor de k para que as retas r e s, não verticais, respectivamente, de equações $(k + 1)x + y + 1 = 0$, e $-(k^2 - 2)x + 2y - 3 = 0$, sejam paralelas.

▶ ***Resolução***

Inicialmente, vamos obter a equação reduzida das retas r e s e seus respectivos coeficientes angulares.

Reta r:

$$(k + 1)x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -(k + 1)x - 1$$

Portanto: $m_r = -(k + 1)$

Reta s:

$$-(k^2 - 2)x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{(k^2 - 2)x}{2} + \frac{3}{2}$$

Portanto: $m_s = \frac{k^2 - 2}{2}$

Para que as retas r e s sejam paralelas, é necessário que os coeficientes angulares de ambas sejam iguais. Assim:

$$m_r = m_s$$

$$-(k + 1) = \frac{k^2 - 2}{2}$$

$$-2k - 2 = k^2 - 2$$

$$k^2 + 2k = 0$$

Resolvendo a última igualdade, temos:

$$k^2 + 2k = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ ou } k = -2$$

Portanto, as retas r e s são paralelas quando $k = 0$ ou $k = -2$.

Observação

As equações das retas r e s na forma reduzida são:

- Para $k = 0$
  - r: $y = -x - 1$
  - s: $y = -x + \frac{3}{2}$
- Para $k = -2$
  - r: $y = x - 1$
  - s: $y = x + \frac{3}{2}$

Observação

Se $k = -1$, r seria uma reta vertical, mas s não.

Se $k = \sqrt{2}$ ou $k = -\sqrt{2}$, s seria uma reta vertical, mas r não.

Em ambos os casos r e s não seriam paralelas.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

69. Verifique se, em cada item, as equações gerais das retas r e s representam retas paralelas e, em caso afirmativo, classifique-as em paralelas coincidentes ou paralelas distintas.

a) r: $8x - 4y + 12 = 0$ e s: $3x - y - 5 = 0$
concorrentes

b) r: $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t + 1 \end{cases}$, com $t \in \mathbb{R}$, e s: $x + y - 3 = 0$
paralelas coincidentes

c) r: $2x + 3y + 8 = 0$ e s: $-6x - 9y - 12 = 0$
paralelas distintas

70. Ver resolução no Guia do professor.

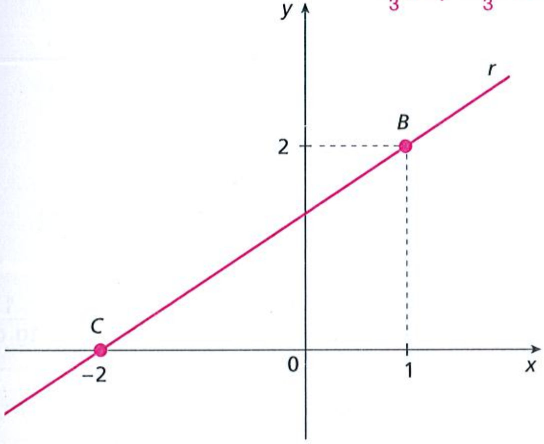
70. Dadas as retas r, de equação $2x - 4y - 2 = 0$, e s, de equação $y = \dfrac{x}{2} + 3$, faça o que se pede.

a) Represente essas retas no plano cartesiano.

b) Observe a figura pedida no item **a** e escreva a posição relativa de r e s.

c) Verifique algebricamente a resposta dada no item **b**.

71. Observe a figura e determine a equação da reta que passa pelo ponto $A(2, 1)$ e é paralela à reta determinada pelos pontos B e C.
$\frac{2}{3}x - y - \frac{1}{3} = 0$



ADILSON SECCO

72. Determine a equação geral da reta r que passa pela origem do sistema cartesiano e é paralela à reta de equação $5x - y + 2 = 0$. $5x - y = 0$

73. Obtenha a equação reduzida da reta paralela à reta $4x - 2y + 1 = 0$ e que passa pelo ponto de intersecção da reta $2x - y + 3 = 0$ com o eixo das ordenadas. $y = 2x + 3$

74. (UEM-PR) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no plano, considere duas retas r e s. A reta r passa pelos pontos $A(1, 0)$ e $B(-1, 2)$, e a reta s passa pelo ponto $C(2, -1)$ e tem coeficiente angular $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

a) Encontre o coeficiente angular da reta r. -1

b) Encontre a interseção P das retas r e s. $(2, -1)$

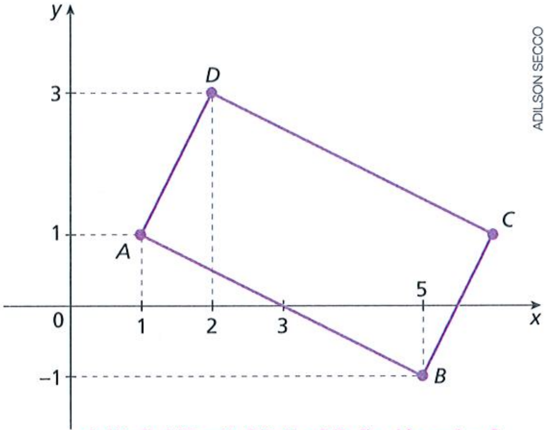
c) Encontre a equação da reta t que passa por A e é paralela à reta s. $x + 2y - 1 = 0$

75. Em cada item, calcule o valor de k para que as retas r e s sejam paralelas. $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) r: $2x - ky + 3 = 0$ e s: $4kx - y + 1 = 0$

b) r: $2y - 4k^2x - 1 = 0$ e s: $16x - 2y + 7 = 0$
$k = 2$ ou $k = -2$

76. Analise o retângulo abaixo e determine o que se pede.



ADILSON SECCO

a) $A(1, 1)$, $B(5, -1)$, $C(6, 1)$ e $D(2, 3)$; b) $y - 1 = 0$

a) As coordenadas dos vértices do retângulo.

b) A equação geral da reta suporte da diagonal $\overleftrightarrow{CA}$.

c) A área do retângulo. 10 unidades de área

d) O perímetro do retângulo.
$6\sqrt{5}$ unidades de comprimento

77. Sabe-se que os pontos $A\left(-8, \dfrac{1}{2}\right)$, $B(2, 3)$ e $C(4, -6)$ são vértices de um triângulo. Determine:

a) o baricentro G do triângulo ABC;

b) a equação geral da reta que contém o lado $\overline{BC}$;

c) a equação geral da reta que passa pelo ponto G e é paralela ao lado $\overline{BC}$. $27x + 6y + 23 = 0$

77. a) $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}\right)$; b) $9x + 2y - 24 = 0$

3.2 Condição de perpendicularismo de duas retas

Vamos verificar quais condições algébricas devem ocorrer para que as retas r e s, de coeficientes angulares m_r e m_s, sejam concorrentes.

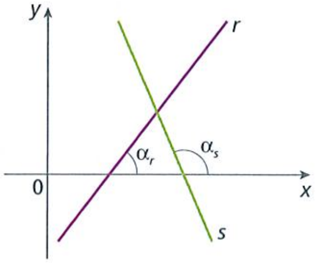
Lembrando que as retas concorrentes cruzam-se em um único ponto, percebemos que elas podem ser perpendiculares ou não.

Reflita

- Se r e s forem verticais, podem ser retas concorrentes?
- Se apenas uma das retas, r ou s, for vertical, pode ocorrer a igualdade $m_r = m_s$? não; não

Retas concorrentes

Vamos considerar as retas concorrentes r e s, não verticais, de inclinações α_r e α_s e de coeficientes angulares $m_r = \text{tg}\ \alpha_r$ e $m_s = \text{tg}\ \alpha_s$, conforme mostra a figura abaixo.



ADILSON SECCO

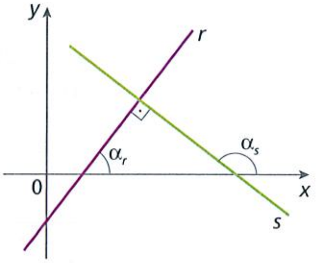
Se as retas r e s são concorrentes, isto é, não paralelas, temos:

$\alpha_r \neq \alpha_s \Rightarrow \text{tg}\ \alpha_r \neq \text{tg}\ \alpha_s \Rightarrow m_r \neq m_s$

Portanto, retas concorrentes não verticais têm coeficientes angulares diferentes.

Retas concorrentes perpendiculares

Vamos considerar as retas r e s, não verticais, concorrentes perpendiculares, conforme a figura:



ADILSON SECCO

Assim:

$\alpha_s = \alpha_r + 90° \Rightarrow \text{tg}\ \alpha_s = \text{tg}\ (\alpha_r + 90°)$ (I)

$$\text{tg}\ (\alpha_r + 90°) = \frac{\text{sen}\ (\alpha_r + 90°)}{\cos\ (\alpha_r + 90°)} = \frac{\text{sen}\ \alpha_r \cdot \cos 90° + \text{sen}\ 90° \cdot \cos \alpha_r}{\cos \alpha_r \cdot \cos 90° - \text{sen}\ \alpha_r \cdot \text{sen}\ 90°}$$

Como $\cos 90° = 0$ e $\text{sen}\ 90° = 1$, temos:

$$\text{tg}\ (\alpha_r + 90°) = \frac{\text{sen}\ \alpha_r \cdot 0 + 1 \cdot \cos \alpha_r}{\cos \alpha_r \cdot 0 - \text{sen}\ \alpha_r \cdot 1} = \frac{\cos \alpha_r}{-\text{sen}\ \alpha_r} = -\frac{1}{\frac{\text{sen}\ \alpha_r}{\cos \alpha_r}} = -\frac{1}{\text{tg}\ \alpha_r} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), vem: $\text{tg}\ \alpha_s = -\dfrac{1}{\text{tg}\ \alpha_r} \Rightarrow m_s = -\dfrac{1}{m_r} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$

Portanto, as retas r e s, não verticais, são perpendiculares quando:

$$m_r \cdot m_s = -1$$

Exercícios resolvidos

R30. Verificar se as retas r e s, de equações $2x + 3y - 6 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$, são perpendiculares.

▶ ***Resolução***

Reta r: $2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{2}{3}x + 2 \Rightarrow m_r = -\dfrac{2}{3}$

Reta s: $3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2} \Rightarrow m_s = \dfrac{3}{2}$

Como $-\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{2} = -1$, sabemos que $m_r \cdot m_s = -1$, portanto, $r \perp s$.

Observação

A notação $r \perp s$ indica que as retas r e s são perpendiculares.

R31. Escrever a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $P(-2, 1)$ e é perpendicular à reta s de equação $2x + y - 2 = 0$.

▸ **Resolução**

Para que as retas r e s sejam perpendiculares, é necessário que o produto de seus coeficientes angulares seja igual a -1.

Como o coeficiente angular da reta s é -2, temos:

$$m_s \cdot m_r = -1$$

$$(-2) \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_r = \frac{1}{2}$$

O ponto P pertence à reta r, então:

$$y_P = m_r \cdot x_P + n_r$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + n_r \Rightarrow n_r = 2$$

Logo, a equação da reta r, perpendicular à reta s, é $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Observação

A equação reduzida da reta s é:

$2x + y - 2 = 0$

$y = -2x + 2$

Portanto, $m_s = -2$.

R32. Determinar a equação reduzida da mediatriz r do segmento $\overline{AB}$, de extremidades $A(1, 3)$ e $B(-5, -1)$.

▸ **Resolução**

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento e que passa por seu ponto médio.

Vamos determinar as coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{AB}$:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-5)}{2} = -2$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

O ponto médio é $M(-2, 1)$.

O coeficiente angular da reta suporte do segmento $\overline{AB}$ é dado por:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 3}{-5 - 1} = \frac{2}{3}$$

O coeficiente angular da reta mediatriz r é dado por:

$$m_{\overline{AB}} \cdot m_r = -1$$

$$\frac{2}{3} \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_r = -\frac{3}{2}$$

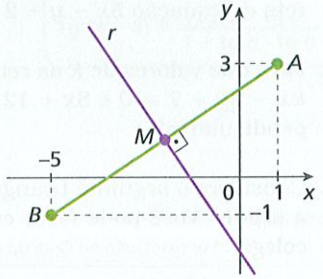
Como o ponto médio M de $\overline{AB}$ pertence à mediatriz r, temos:

$$y = m_r \cdot x + n_r$$

$$1 = -\frac{3}{2} \cdot (-2) + n_r \Rightarrow n_r = -2$$

Portanto, a equação da reta r mediatriz de $\overline{AB}$ é:

$$y = -\frac{3}{2}x - 2$$



ADILSON SECCO

R33. Obter as coordenadas do baricentro G de um triângulo qualquer sabendo que as retas suportes de duas de suas medianas são dadas por $x - 6y + 8 = 0$ e $3x - 2y + 8 = 0$.

▸ **Resolução**

O baricentro de um triângulo é a intersecção de suas medianas. Assim, as coordenadas do baricentro G serão determinadas pela solução do sistema:

$$\begin{cases} x - 6y + 8 = 0 \\ 3x - 2y + 8 = 0 \end{cases}$$

Vamos isolar x na 1ª equação:

$$x = 6y - 8 \quad \text{(I)}$$

Substituindo x por $6y - 8$ na 2ª equação, temos:

$$3(6y - 8) - 2y + 8 = 0$$

$$16y - 16 = 0 \Rightarrow y = 1$$

Substituindo y por 1 em (I), obtemos:

$$x = 6 \cdot 1 - 8 = -2$$

Então: $G(-2, 1)$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

78. Em cada item, verifique se as retas r e s são paralelas coincidentes, paralelas distintas, concorrentes ou concorrentes perpendiculares.

a) $r\colon x + y - 3 = 0$ e $s\colon x - y + 1 = 0$ perpendiculares

b) $r\colon \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$ e $s\colon y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$ concorrentes

c) $r\colon \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}$ com $t \in \mathbb{R}$ e $s\colon -x + y - 3 = 0$ paralelas distintas

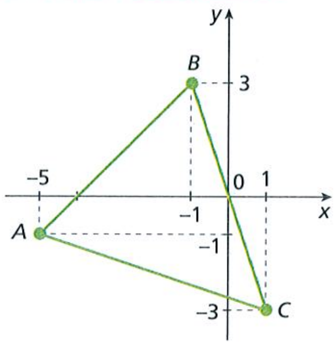
d) $r\colon 2x - y + 2 = 0$ e $s\colon x - \dfrac{1}{2}y + 1 = 0$ paralelas coincidentes

79. Dada a reta r, de equação $y = 3x - 1$, e o ponto $P(-3, 1)$, determine a equação geral da reta s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r. $x + 3y = 0$

80. Determine a equação geral da reta r que passa pela origem do sistema cartesiano e é perpendicular à reta de equação $5x - y + 2 = 0$. $x + 5y = 0$

81. Para que valores de k as retas r e s, de equações $kx - 2y + 7 = 0$ e $8x + 12y - 15 = 0$, são perpendiculares? $k = 3$

82. Considere o seguinte triângulo e resolva os itens a seguir. Você pode fazer esta questão com um colega. Ver resolução no Guia do professor.



ADILSON SECCO

a) Obtenha a equação da mediatriz de cada um dos lados do triângulo.

b) O **circuncentro** C de um triângulo ABC é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados desse triângulo. Determine as coordenadas do ponto C. $C\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

83. As equações das retas suportes dos lados de um triângulo ABC são: Ver resolução no Guia do professor.

$\overleftrightarrow{AB}\colon -y - 2x + 4 = 0$

$\overleftrightarrow{BC}\colon -2x + 3y - 4 = 0$

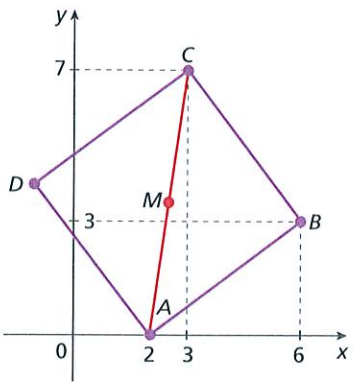
$\overleftrightarrow{AC}\colon -2x + y + 4 = 0$

a) Determine os vértices do triângulo ABC e localize esses pontos no plano cartesiano.

b) Obtenha a equação das retas suportes das três alturas do triângulo.

c) Dê as coordenadas do ortocentro O, ponto de intersecção das retas que contêm as alturas do triângulo.

84. Observe o losango:



ADILSON SECCO

Lembrando que as diagonais de um losango são perpendiculares e se cruzam em seu ponto médio, determine: $x + 7y - 27 = 0$

a) a equação da reta suporte da diagonal $\overline{BD}$;

b) as coordenadas do ponto D. $(-1, 4)$

85. (UEPB) Dois lados de um quadrado estão sobre as retas $(r)\ 3x - \sqrt{7}y = 6$ e $(s)\ 3x + \sqrt{7}y = -1$. Considerando a unidade de comprimento cm, a área deste quadrado é: alternativa d

a) $\dfrac{49}{16}$ cm²

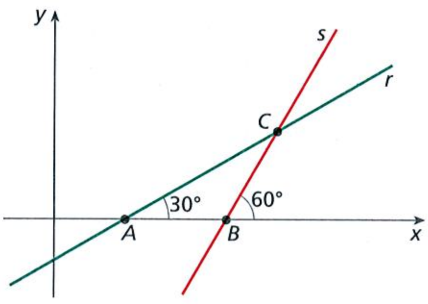
b) $\dfrac{23}{16}$ cm²

c) $\dfrac{21}{16}$ cm²

d) $\dfrac{25}{16}$ cm²

e) $\dfrac{19}{16}$ cm²

86. (UFMS) Considere, no plano cartesiano de eixos Ox e Oy, as retas r e s e os pontos $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (c, 3)$, com $0 < a < b < c$, conforme os dados da figura abaixo.



ADILSON SECCO

De acordo com o exposto acima, é correto afirmar que:

(01) a bissetriz interna, relativa ao vértice B do triângulo ABC, é perpendicular à reta r.

(02) a equação da reta s é $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}b$.

(04) $a + 2c - 3b \neq 0$.

(08) a área do triângulo ABC é $3\sqrt{3}$ unidades de área.

(16) a distância do ponto C ao eixo Ox é igual a $\sqrt{3}$ unidades de comprimento.

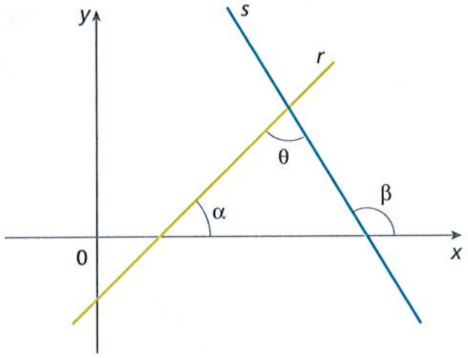
- Qual é a soma das alternativas corretas? $1 + 8 = 9$

3.3 Retas concorrentes e o ângulo formado entre elas

Seja θ o ângulo agudo formado entre duas retas concorrentes, r e s, de coeficientes angulares m_r e m_s respectivamente. Admitindo que nenhuma das retas seja perpendicular ao eixo x, temos:

Observação

- Se $r \parallel s$, então: $m_r = m_s$ e $\theta = 0°$
- Se $r \perp s$, então: $m_r \cdot m_s = -1$ e $\theta = 90°$



ADILSON SECCO

Observe que nesse caso $\beta > \alpha$ e $\beta = \alpha + \theta$. Assim:

$$\theta = \beta - \alpha \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \text{tg}\,(\beta - \alpha) \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha}{1 + \text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}\,\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \quad (\theta \text{ é agudo e } \text{tg}\,\theta > 0)$$

Observação

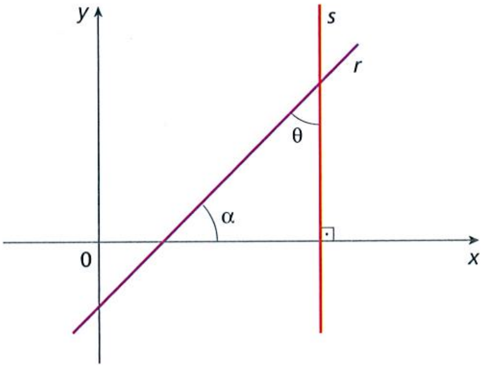
$$\text{tg}\,(a - b) = \frac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$$

Por raciocínio análogo, se $\beta < \alpha$, isto é, se r e s trocassem de lugar na figura acima, encontraríamos $\text{tg}\,\theta = -\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$, pois θ é agudo e $\text{tg}\,\theta > 0$.

Portanto, em qualquer situação:

$$\text{tg}\,\theta = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right|$$

No caso em que uma das retas é vertical e a outra é não horizontal, temos:



ADILSON SECCO

Assim:

$$\theta + \alpha = 90° \Rightarrow \theta = 90° - \alpha \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \text{tg}\,(90° - \alpha) \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{1}{m_r}$$

Com declividade negativa ($90° < \alpha < 180°$), analogamente, isto é, se r e s trocassem de lugar na figura acima, encontraríamos $\text{tg}\,\theta = -\frac{1}{m_r}$.

Portanto, em qualquer situação:

$$\text{tg}\,\theta = \left| \frac{1}{m_r} \right|$$

Observação

$$\text{tg}\,\theta = \text{tg}\,(90° - \alpha) =$$

$$= \frac{\text{sen}\,(90° - \alpha)}{\cos\,(90° - \alpha)} = \frac{\cos\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{1}{m_r}$$

Exemplos

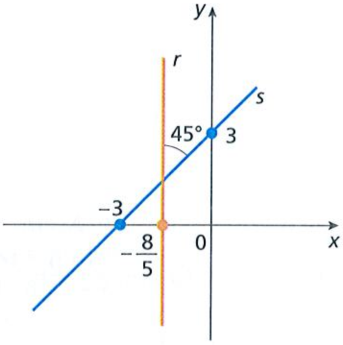
a) Considere as retas r e s, de equações $5x + 8 = 0$ e $y = x + 3$, respectivamente.

- Determinar o ângulo agudo θ formado entre essas retas.

  Como r é perpendicular ao eixo x (reta vertical), segue que $\text{tg}\ \theta = \left|\dfrac{1}{m_s}\right|$.

  Como $m_s = 1$, temos: $\text{tg}\ \theta = \left|\dfrac{1}{1}\right| \Rightarrow \text{tg}\ \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45°$

  Portanto, o ângulo formado pelas retas r e s mede 45°.
- Representar as retas r e s no mesmo plano cartesiano e indicar o ângulo agudo formado entre elas.



ADILSON SECCO

b) O ângulo agudo formado entre as retas r e s mede 45°. Se o coeficiente angular de r é $m_r = \dfrac{3}{2}$, determinar o coeficiente angular m_s da reta s.

$$\text{tg}\ \theta = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}\right| \Rightarrow \text{tg}\ 45° = \left|\frac{m_s - \frac{3}{2}}{1 + m_s \cdot \frac{3}{2}}\right| \Rightarrow 1 = \left|\frac{2m_s - 3}{2 + 3m_s}\right|$$

Para $\dfrac{2m_s - 3}{2 + 3m_s} = 1$, temos $m_s = -5$.

Para $\dfrac{2m_s - 3}{2 + 3m_s} = -1$, temos $m_s = \dfrac{1}{5}$.

Portanto, $m_s = -5$ ou $m_s = \dfrac{1}{5}$.

Observação

Sendo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}_+$, temos:
$|x| = k \Rightarrow x = k$ ou $x = -k$

Exercícios propostos

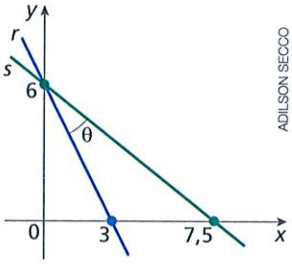
Registre as respostas em seu caderno

87. Determine a medida do ângulo agudo formado pelas retas r, de equação $x - 3 = 0$, e s, de equação $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$. 60°

88. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $(1, 2)$ e forma um ângulo de 45° com a reta $3x - y + 2 = 0$. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ou $y = -2x + 4$

89. Calcule o valor de k para que as retas dadas por $x + 3y - 13 = 0$ e $kx + y = 0$ formem um ângulo de 45°. 2 ou $-\frac{1}{2}$

90. Observe o gráfico e, com o auxílio de uma calculadora científica, calcule o valor do ângulo θ. $\simeq 25°$

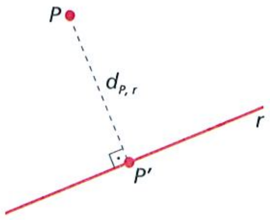


ADILSON SECCO

4 Distância entre ponto e reta

4.1 Cálculo da distância entre um ponto e uma reta

Como já vimos, a distância de um ponto P a uma reta r é a distância entre P e sua projeção P' sobre r.



ADILSON SECCO

Exemplo

Para calcular a distância entre o ponto $P(-2, 5)$ e a reta r, de equação $2x + y + 1 = 0$, precisamos inicialmente encontrar a equação da reta s que passa por P e é perpendicular a r.

Como as retas r e s interceptam-se no ponto $P'(x, y)$, para resolver o problema basta calcular a distância entre P e P'.

Reta r: $2x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x - 1 \Rightarrow m_r = -2$

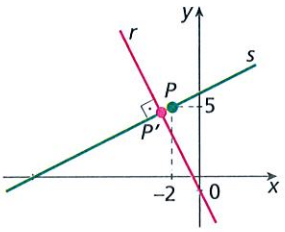
Para $r \perp s$: $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow (-2) \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = \dfrac{1}{2}$

Portanto, a equação da reta s que passa por P é:

$$y - y_P = m_s(x - x_P) \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow x - 2y + 12 = 0$$

Como $\{P'\} = r \cap s$, devemos resolver o sistema formado pelas equações das retas r e s e obter as coordenadas de P'.

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - 2y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{14}{5} \text{ e } y = \frac{23}{5}$$



ADILSON SECCO

Portanto: $P'\left(-\dfrac{14}{5}, \dfrac{23}{5}\right)$

Como $d_{P,\,r} = d_{P,\,P'}$, temos:

$$d_{P,\,r} = \sqrt{\left(-\frac{14}{5} + 2\right)^2 + \left(\frac{23}{5} - 5\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Logo, a distância entre o ponto P e a reta r é $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Observação

$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \text{ (I)} \\ x - 2y + 12 = 0 \text{ (II)} \end{cases}$

De (I), obtemos $y = -2x - 1$ (III).

Substituindo (III) em (II), temos:

$x - 2(-2x - 1) + 12 = 0$

$x = -\dfrac{14}{5}$

Substituindo $x = -\dfrac{14}{5}$ em (I), obtemos:

$2\left(-\dfrac{14}{5}\right) + y + 1 = 0$

$y = \dfrac{23}{5}$

4.2 Fórmula da distância entre um ponto e uma reta

Ao aplicar o processo usado no exemplo anterior para um ponto $P(x_P, y_P)$ e uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$, obtemos a fórmula empregada para calcular a distância $d_{P,\,r}$ entre o ponto P e a reta r:

$$d_{P,\,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo

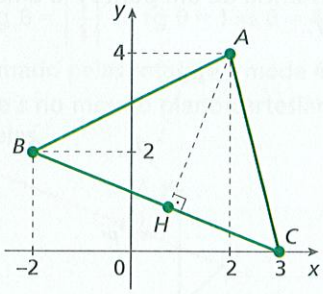
Aplicando a fórmula ao exemplo anterior, tendo o ponto $P(-2, 5)$ e a reta r de equação $2x + y + 1 = 0$, obtemos:

$$d_{P,\,r} = \frac{|2 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Exercícios resolvidos

R34. Dado o triângulo de vértices $A(2, 4)$, $B(-2, 2)$ e $C(3, 0)$, calcular a medida de sua altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

▶ ***Resolução***



ADILSON SECCO

Vamos determinar a equação da reta suporte do lado $\overline{BC}$:

$$\overleftrightarrow{BC}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 5y - 6 = 0$$

A medida da altura procurada é a distância entre o ponto $A(2, 4)$ e a reta $\overleftrightarrow{BC}$:

$$d_{A,\overleftrightarrow{BC}} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + (-6)|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{18}{\sqrt{29}} = \frac{18\sqrt{29}}{29}$$

Portanto, a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$ é $\frac{18\sqrt{29}}{29}$.

R35. Calcular a distância entre as retas paralelas r e s, de equações $2x - y + 4 = 0$ e $2x - y - 7 = 0$, respectivamente.

▶ ***Resolução***

Sabemos que a distância entre duas retas paralelas é igual à distância de um ponto P qualquer de uma delas à outra reta.

Então, vamos calcular as coordenadas de um ponto P qualquer da reta r.

Para $x = 0$, temos: $2 \cdot 0 - y + 4 = 0 \Rightarrow y = 4$

Portanto: $P(0, 4)$

Agora basta calcular a distância entre P e a reta s.

$$d_{P,s} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + (-7)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

Logo, a distância entre as duas retas é $\frac{11\sqrt{5}}{5}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

91. Calcule a distância entre o ponto $A(1, 2)$ e a reta r, de equação $2x + y + 3 = 0$. $\frac{7\sqrt{5}}{5}$

92. Considere a reta r, de equação $3x + y - 5 = 0$. Determine:

a) a equação geral de uma reta s paralela à reta r e que passa pelo ponto $P\left(\frac{1}{6}, 0\right)$; $3x + y - \frac{1}{2} = 0$

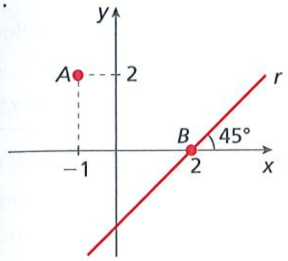
b) a distância entre as retas r e s. $\frac{9\sqrt{10}}{20}$

93. Obtenha a distância da origem do plano cartesiano à reta de equação $3x + 4y - 4 = 0$. $\frac{4}{5}$

94. Um triângulo tem os vértices $A(2, 0)$, $B(3, 1)$ e $C(0, 2)$. Calcule a medida da altura do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

95. Obtenha a distância entre as retas paralelas $2x - 3y + 5 = 0$ e $4x - 6y - 1 = 0$. $\frac{11\sqrt{13}}{26}$

96. Um quadrado tem um vértice em A e um lado na reta r.



ADILSON SECCO

a) Identifique o ponto A e determine a equação geral da reta r. $A(-1, 2)$; $x - y - 2 = 0$

b) Calcule a medida ℓ do lado do quadrado.

c) Determine a medida da diagonal do quadrado.

d) Calcule a área e o perímetro do quadrado.

Ver resolução no Guia do professor.

97. Dadas as retas $r: 2x + 5y - 4 = 0$ e $s: 5x - 2y + 8 = 0$, encontre as equações das retas cujos pontos são equidistantes de r e s. Siga estes passos:

- Considere um ponto genérico $P(x, y)$.
- Use a definição $d_{P,\,r} = d_{P,\,s}$.
- Organize a equação eliminando os módulos.
- Verifique se as equações que você encontrou representam retas bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e s.

98. (FGV) No plano cartesiano, seja P o ponto situado no 1º quadrante e pertencente à reta de equação $y = 3x$. Sabendo que a distância de P à reta de equação $3x + 4y = 0$ é igual a 3, podemos afirmar que a soma das coordenadas de P vale:

a) 5,6 **b)** 5,2 **c)** 4,8 **d)** 4,0 **e)** 4,4

alternativa d

96. b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ unidades de comprimento; **c)** 5 unidades de comprimento; **d)** área: $\frac{25}{2}$ unidades de área; perímetro: $10\sqrt{2}$ unidades de comprimento

5 Inequações do 1º grau com duas incógnitas

Já vimos como resolver inequações na incógnita x. Agora vamos estudar inequações do 1º grau com duas incógnitas.

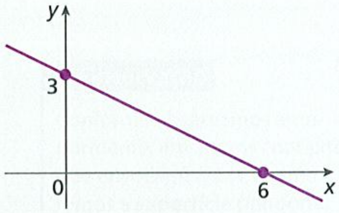
Exemplos

- $2x - 7y < 0$
- $8y - \frac{1}{3}x > 0$
- $\sqrt{5}x + y \geqslant 0$
- $x + y \leqslant 0$

Uma inequação do 1º grau com duas incógnitas admite infinitas soluções, que podem ser representadas graficamente.

Exercícios resolvidos

R36. Representar graficamente a inequação $x + 2y - 6 \leqslant 0$.



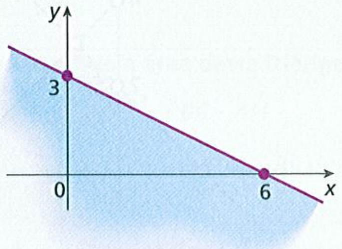
ADILSON SECCO

▸ ***Resolução***

A reta de equação $x + 2y - 6 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos. Para verificar qual dos semiplanos representa os pontos tais que $x + 2y - 6 \leqslant 0$, vamos testar um ponto auxiliar qualquer, por exemplo, $P(0, 0)$, substituindo suas coordenadas na desigualdade:

$x + 2y - 6 \leqslant 0 \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 - 6 \leqslant 0 \Rightarrow -6 \leqslant 0$ (verdadeiro)

Como a sentença é verdadeira, o ponto está no semiplano procurado. Portanto, podemos desenhar o semiplano que representa $x + 2y - 6 \leqslant 0$:



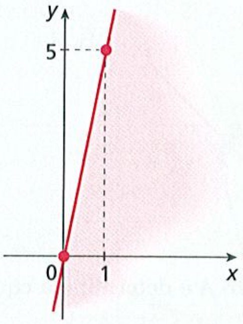
ADILSON SECCO

Reflita

Por que basta testar um único ponto fora da reta $x - 2y - 6 = 0$ para determinar o semiplano que representa a inequação $x - 2y - 6 \leqslant 0$?

Ver resolução no Guia do professor.

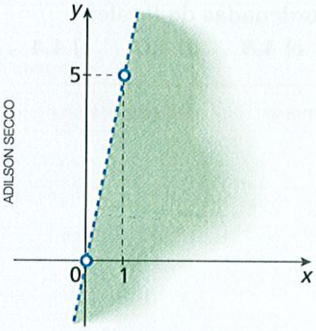
R37. Determinar a inequação cuja representação gráfica é:



ADILSON SECCO

Observação

Se o gráfico fosse o representado abaixo, a resposta seria $5x - y > 0$.



ADILSON SECCO

▶ ***Resolução***

Vamos escrever a equação da reta r que delimita o semiplano. Ela passa pelos pontos (0, 0) e (1, 5), logo $m_r = \dfrac{5 - 0}{1 - 0} = 5$, e sua equação geral é dada por $y - 0 = 5 \cdot (x - 0)$, ou seja, é $5x - y = 0$.

Vamos agora calcular o valor numérico V do 1º membro da equação geral de r para as coordenadas de um ponto da região representada que não pertença a r.

Substituindo na expressão $5x - y$ as coordenadas do ponto $P(1, 0)$, por exemplo, temos: $V = 5 \cdot 1 - 0 = 5$

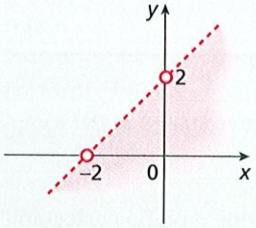
Como $V > 0$ e r faz parte da região representada, os pontos descritos na representação gráfica são tais que $5x - y \geqslant 0$.

R38. Representar graficamente o sistema de inequações: $\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ x + y - 4 \leqslant 0 \end{cases}$

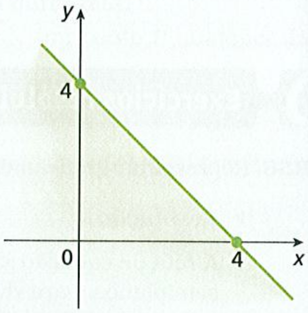
▶ ***Resolução***

Primeiro vamos representar graficamente cada inequação do sistema:

$x - y + 2 > 0$

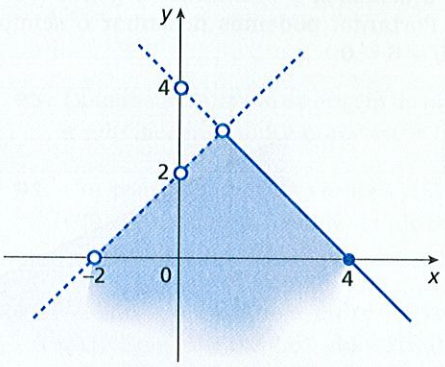


$x + y - 4 \leqslant 0$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

A região procurada é a intersecção dos dois semiplanos formados pelas soluções das inequações $x - y + 2 > 0$ e $x + y - 4 \leqslant 0$. Logo:



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

99. Resolva graficamente as inequações:

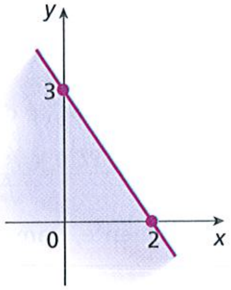
a) $x - y + 1 \geqslant 0$ Ver resolução no Guia do professor.

b) $2x - y + 2 < 0$

100. São dados a reta r, de equação $2x - 5y - 10 = 0$, e o ponto $P(1, k)$. Descubra o valor de k para que o ponto P pertença ao semiplano que representa a inequação $2x - 5y - 10 < 0$. $k > -\frac{8}{5}$

101. Represente graficamente o sistema de inequações: $\begin{cases} 2x - y - 10 \leqslant 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$ Ver resolução no Guia do professor.

102. Determine a inequação cuja representação gráfica é: $3x + 2y - 6 \leqslant 0$



ADILSON SECCO

103. Uma fábrica produz dois tipos de calça, A e B, sendo x a quantidade diária produzida da calça A e y, a da calça B. Cada unidade produzida de A custa R\$ 30,00 e cada unidade produzida de B custa R\$ 70,00, sendo, portanto, o custo total diário da produção conjunta de A e B igual a $p = 30x + 70y$. Ver resolução no Guia do professor.

a) Qual é o significado dos coeficientes de x e y na expressão do custo $p = 30x + 70y$?

b) Sendo o custo total diário igual a R\$ 4.200,00, determine dois pares de valores possíveis para x e y.

c) Sendo o custo total diário igual a R\$ 4.200,00, para a produção de igual quantidade das calças A e B, quantas calças são confeccionadas por dia?

d) Um valor para x ou y que não seja um número natural tem significado nesse problema? Justifique.

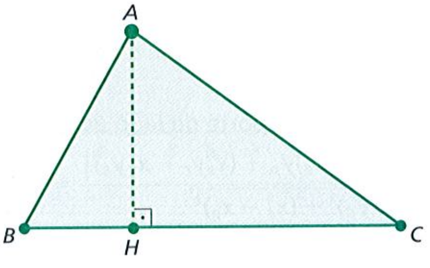
e) Sendo o valor máximo para p igual a R\$ 6.300,00, quais os valores máximos para x e y, admitindo $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$?

f) Represente graficamente os pares (x, y) para os quais se tem $p \geqslant 6.300$.

6 Área de uma superfície triangular: uma aplicação na Geometria analítica

6.1 Cálculo da área do triângulo

Considere o seguinte triângulo:



ADILSON SECCO

Observação

Conforme observamos anteriormente, em alguns contextos que envolvem áreas, chamaremos a **superfície poligonal** com o nome do **polígono** que a determina. Por exemplo, em vez de dizer "a área de uma superfície triangular", diremos "a área do triângulo".

Sabemos, pela Geometria plana, que a área desse triângulo é dada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

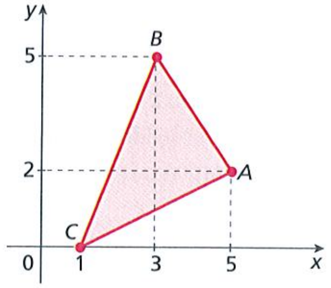
Considerando a distância entre dois pontos e entre um ponto e uma reta, escreveríamos essa fórmula da seguinte maneira:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,C} \cdot d_{A,r}$$

Observe que, nesse caso, r é a reta suporte do lado $\overline{BC}$ do triângulo.

Exemplo

Os pontos $A(5, 2)$, $B(3, 5)$ e $C(1, 0)$ são vértices do triângulo ABC. Calcular a área desse triângulo.



ADILSON SECCO

Para calcular a área do triângulo, podemos escolher $\overline{BC}$ como base e determinar sua medida:

$$d_{B,C} = \sqrt{(1-3)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

Agora vamos determinar a equação da reta r, suporte do lado $\overline{BC}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + y - 5 - 3y = 0 \Rightarrow 5x - 2y - 5 = 0$$

A distância do vértice A à reta r, suporte do lado $\overline{BC}$, é dada por:

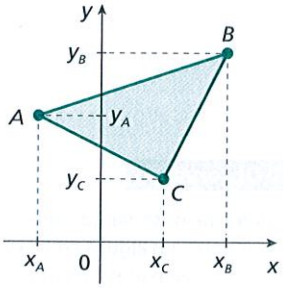
$$d_{A,r} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|5 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 + (-5)|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{|16|}{\sqrt{29}} = \frac{16}{\sqrt{29}}$$

Considerando os dados obtidos anteriormente, vamos calcular a área do triângulo.

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,C} \cdot d_{A,r} \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{16}{\sqrt{29}} = \frac{16}{2} = 8$$

Portanto, a área do triângulo ABC é 8 unidades de área.

6.2 Fórmula da área do triângulo



ADILSON SECCO

Vejamos uma maneira bem simples de calcular a área de um triângulo quando são conhecidas as coordenadas de seus vértices.

Considere o triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.

A medida do lado $\overline{BC}$ é:

$$d_{B,C} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

A equação da reta r, suporte do lado $\overline{BC}$, é dada por:

$$D' = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{(y_B - y_C)}_{a}x + \underbrace{(x_C - x_B)}_{b}y + \underbrace{(x_By_C - x_Cy_B)}_{c} = ax + by + c = 0$$

A distância do vértice A à reta suporte do lado $\overline{BC}$ é:

$$d_{A,r} = \frac{|(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + (x_By_C - x_Cy_B)|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}$$

A área do triângulo é dada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,C} \cdot d_{A,r} \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\cancel{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}\right) \cdot |D|}{\cancel{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}}$$

Portanto:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2}|D|, \text{ com } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Observação

D é D', com $x = x_A$ e $y = y_A$.

Exemplos

a) Para calcular a área do triângulo de vértices $A(5, 2)$, $B(3, 5)$ e $C(1, 0)$ do exemplo anterior, podemos fazer:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 25 + 2 - 5 - 6 = 16$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2}|16| \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = 8$$

Logo, a área do triângulo é 8.

b) Para obter o valor de y, sabendo que os pontos $A(0, 1)$, $B(3, 3)$ e $C(6, y)$ são os vértices de um triângulo cuja área é igual a 6 unidades de área, devemos ter:

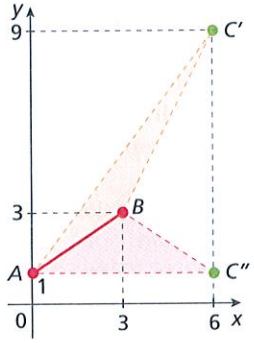
$$A_{\text{triângulo}} = 6 \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow 6 = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow |D| = 12$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & y & 1 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 3y - 18 - 0 - 3 = 3y - 15$$

Resolvendo a equação modular, obtemos:

$$|D| = 12 \Rightarrow |3y - 15| = 12 \Rightarrow \begin{cases} 3y - 15 = 12 \\ \text{ou} \\ 3y - 15 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ \text{ou} \\ y = 1 \end{cases}$$

Portanto, $y = 9$ ou $y = 1$.



ADILSON SECCO

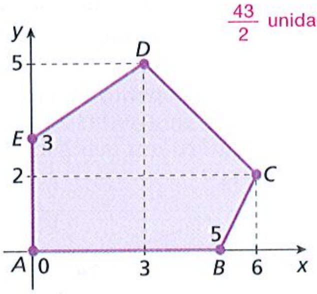
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

104. Obtenha a área do quadrilátero $ABCD$ sabendo que seus vértices são os pontos $A(4, 0)$, $B(7, 2)$, $C(0, 5)$ e $D(1, 1)$. 17 unidades de área

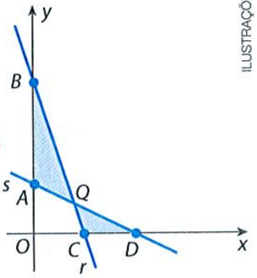
105. Lembrando que todo polígono convexo de n lados pode ser decomposto em $(n - 3)$ triângulos por meio das diagonais que partem de um único vértice, calcule a área do polígono abaixo.

$\frac{43}{2}$ unidades de área



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

106. Considere as retas r e s, de equações $y = -3x + 6$ e $y = -\frac{x}{2} + 2$, respectivamente. Ver resolução no Guia do professor.



Determine:

a) as coordenadas dos pontos A, B, C e D;

b) as coordenadas do ponto Q, intersecção de retas r e s;

c) a área da figura azul;

d) a área do quadrilátero $OAQC$;

e) a área do polígono $OBQD$. (Explique como você obteve esse resultado.)

107. Considere as hipóteses:

(I) Os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são vértices de um triângulo.

(II) $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

a) Calcule a área do "triângulo ABC". 0 unidade de área

b) As hipóteses (I) e (II) são conflitantes? Sim, pois os pontos são colineares.

108. Dados os vértices $A(-2, 2)$, $B(3, -3)$ e $C(x_C, 7)$ de um triângulo, determine a abcissa x_C sabendo que a área desse triângulo é igual a 25 unidades de área. 3 ou −17

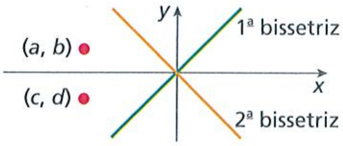
109. Dois dos vértices de um triângulo ABC são $A(2, -2)$ e $B(3, -3)$. Sabe-se que a área do triângulo é igual a 6 unidades de área e que o vértice C pertence à reta $2x + y - 1 = 0$. Encontre as coordenadas do vértice C. $(-11, 23)$ ou $(13, -25)$

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. (UFMG) Os pontos (a, b) e (c, d) estão representados na figura. alternativa c



ADILSON SECCO

O ponto $(a - b, c - d)$ está situado no:

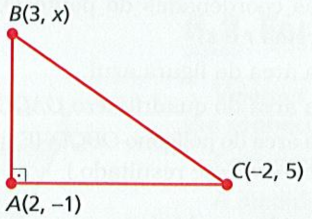
a) 1º quadrante
b) 2º quadrante
c) 3º quadrante
d) 4º quadrante
e) eixo Ox.

2. Determine o valor de $m \in \mathbb{R}$ de modo que o ponto $P(2m^2 - 5m, -m^2 - m + 9)$ esteja na bissetriz dos quadrantes pares. 3

Exercício resolvido

R39. Determinar o valor de x de modo que os pontos $A(2, -1)$, $B(3, x)$ e $C(-2, 5)$ sejam os vértices de um triângulo retângulo em A.

▸ ***Resolução***



ADILSON SECCO

$$(d_{A,\,C})^2 + (d_{A,\,B})^2 = (d_{B,\,C})^2$$

$$\left(\sqrt{(-2-2)^2 + (5+1)^2}\right)^2 +$$

$$+ \left(\sqrt{(2-3)^2 + (-1-x)^2}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{(-2-3)^2 + (5-x)^2}\right)^2$$

$$16 + 36 + 1 + (-1-x)^2 = 25 + (5-x)^2$$

$$53 + 1 + 2x + x^2 = 25 + 25 - 10x + x^2$$

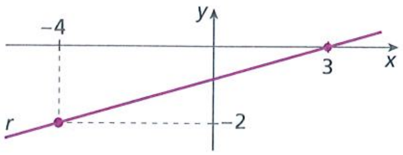
$$12x = -4$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

3. Calcule o valor de x sabendo que o triângulo ABC é retângulo em C e que $A(2, 2)$, $B(4, -12)$ e $C(-4, x)$. −6 ou −4

4. O baricentro de um triângulo é dado pelo ponto $G(1, 5)$, e dois de seus vértices são $A(-3, 9)$ e $B(2, 1)$. Descubra as coordenadas do vértice C desse triângulo. $C(4, 5)$

5. Escreva a equação da reta representada a seguir. $2x - 7y - 6 = 0$



ADILSON SECCO

6. Um mapa rodoviário foi desenhado sobre um sistema de coordenadas cartesianas, e a rodovia principal obedece à equação $6x + 2y - 3 = 0$. Determine a lei a que devem obedecer duas rodovias distintas que se cruzam na origem desse sistema e formam um ângulo de 45° com a rodovia principal. $y = -\frac{x}{2}$ e $y = 2x$

7. A reta que passa pelos pontos distintos $A(m, 2)$ e $B(5, -m)$ tem coeficiente angular igual a $-\frac{2}{3}$. Qual é o valor de m? $\frac{4}{5}$

8. Determine $p \in \mathbb{R}$ de modo que as retas r e s, de equações $-2x + (p - 7)y + 3 = 0$ e $px + y - 13 = 0$, respectivamente, sejam perpendiculares. −7

9. Calcule a tangente do ângulo formado pelas retas $3x + 2y + 2 = 0$ e $-x + 2y + 5 = 0$. 8

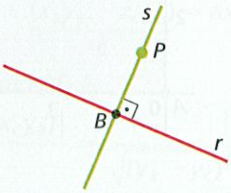
10. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que as retas $-3x + 2y - 5 = 0$ e $mx + y - 6 = 0$ formem um ângulo de 45° entre si. $-\frac{1}{5}$ ou 5

Exercício resolvido

R40. Sejam $P(1, 2)$ e a reta r, de equação $x - y = 0$. Determinar a projeção ortogonal de P sobre r.

▸ ***Resolução***

Inicialmente obtemos a reta s, que passa por P e é perpendicular à reta r. Depois, determinamos o ponto B como intersecção das retas r e s. O ponto B será a projeção ortogonal de P sobre r.



ADILSON SECCO

- Reta s: passa por $P(1, 2)$ e $s \perp r$. Então:

  $m_r = 1$ e $m_s = -1$

  $y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow x + y - 3 = 0$

- Ponto B: $r \cap s$. Então:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ e } y = \frac{3}{2}$$

Portanto: $B = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

11. Determine a projeção ortogonal do ponto $A(2, 3)$ sobre a reta r, de equação $x + 2y - 3 = 0$. (1, 1)

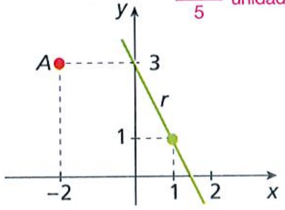
12. A pressão atmosférica diminui conforme subimos em relação ao nível do mar, onde a pressão é de 1 atm. A 100 metros de altura, a pressão é de 0,95 atm. Se a variação de pressão é linear, represente num plano cartesiano o gráfico que representa essa função, destacando os pontos (0, 1) e (100; 0,95). Determine a lei que define essa variação. $5x + 10.000y = 10.000$

13. (FCC-SP) As retas de equações $ax + y = a + 2$ e $4x + ay = 4 - a^2$ são: alternativa c

a) concorrentes, qualquer que seja o valor de $a \neq 0$.
b) paralelas, qualquer que seja o valor de a.
c) paralelas, se $a = 2$ ou $a = -2$.
d) concorrentes para todo $a \neq 2$.
e) concorrentes para todo $a \neq 4$.

14. Durante 5 minutos, uma placa de metal sofre um resfriamento linear de 30 °C de temperatura inicial para −10 °C. Iniciado o resfriamento, após quanto tempo essa placa deve atingir 0 °C? 3 minutos e 45 segundos

15. Calcule a distância entre o ponto A e a reta r da figura. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ unidades de comprimento



ADILSON SECCO

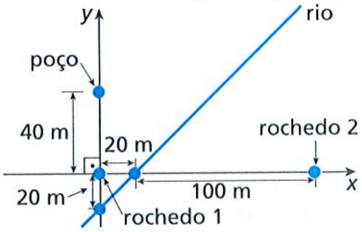
16. Determine a área do quadrado que tem vértice $A(-3, 1)$ e um lado na reta de equação $x + 2y - 4 = 0$. 5 unidades de área

17. Represente graficamente o sistema de inequações: Ver resolução no Guia do professor.
$$\begin{cases} 2x - 3y \geq 0 \\ x - y + 1 \leq 0 \end{cases}$$

18. (Mackenzie-SP) As retas $x + y = 0$, $x - y = 0$ e $2x + y - 3 = 0$ definem um triângulo de área: alternativa d

a) $\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{3}$
e) 2
b) 4
d) 3

19. (Fuvest-SP) Um pirata enterrou um tesouro numa ilha e deixou um mapa com as seguintes indicações: o tesouro está enterrado num ponto da linha reta entre os dois rochedos; está a mais de 50 m do poço e a menos de 20 m do rio (cujo leito é reto). Ver resolução no Guia do professor.

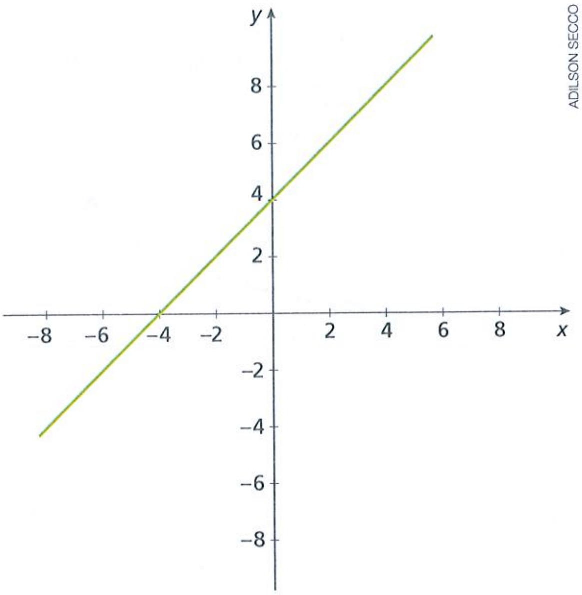


ADILSON SECCO

a) Descreva, usando equações e inequações, as indicações deixadas pelo pirata, utilizando para isso o sistema de coordenadas mostrado na figura.

b) Determine o menor intervalo ao qual pertence a coordenada x do ponto $(x, 0)$ onde o tesouro está enterrado.

20. (Enem) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



ADILSON SECCO

A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto: alternativa b

a) (−5, 0)
d) (0, 4)
b) (−3, 1)
e) (2, 6)
c) (−2, 1)

Aprofundamento

21. Sejam $A(-5, -5)$, $B(19, 0)$ e $C(1, 5)$ os vértices de um triângulo ABC. Verifique se a reta r, de equação $5x - 3y = 20$, passa pelo baricentro desse triângulo. não

22. (Unicamp) Os pontos A, B, C e D pertencem ao gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$. As abscissas de A, B e C são iguais a 2, 3 e 4, respectivamente, e o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{CD}$.

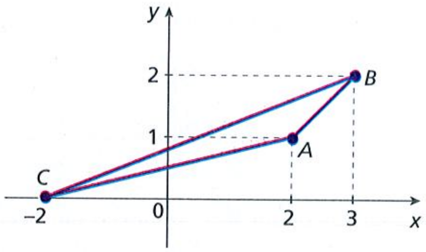
a) Encontre as coordenadas do ponto D. $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$

b) Mostre que a reta que passa pelos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ passa também pela origem. Ver resolução no Guia do professor.

23. Que ângulo a reta que passa pelos pontos $P(2a + 3, 5a - 2)$ e $Q(2a - 6, 7 + 5a)$ forma com o eixo x? 135°

24. A equação da reta que passa por $P(2a, 6)$ e tem coeficiente angular -3 é dada por $3x + y + 6 = 0$. Determine a. -2

25. Calcule a altura relativa ao vértice A do triângulo da figura abaixo. $\frac{3\sqrt{29}}{29}$



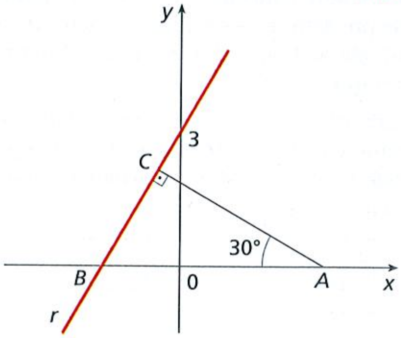
ADILSON SECCO

26. Encontre as coordenadas do ponto B, simétrico de $A(-3, 2)$ com relação à reta de equação $x + y - 1 = 0$. $B(-1, 4)$

27. (UFBA) Considere os pontos $A(-1, 2)$, $B(1, 4)$ e $C(-2, 5)$ do plano cartesiano.

Sendo D o ponto simétrico de C em relação à reta que passa por A e é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, determine a área do quadrilátero $ABCD$. 8 unidades de área

28. (UEMS) A equação da reta r que passa pelo ponto $(0, 3)$ e contém o segmento $\overline{BC}$ do triângulo ABC é: alternativa c



ADILSON SECCO

a) $\sqrt{3}x + y - 3 = 0$

b) $\sqrt{3}x + y + 3 = 0$

c) $\sqrt{3}x - y + 3 = 0$

d) $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$

e) $x + \sqrt{3}y = 0$

29. (FGV) Considere os pontos $A(1, -2)$, $B(-2, 4)$ e $C(3, 3)$. A altura do triângulo ABC pelo vértice C tem equação: alternativa a

a) $2y - x - 3 = 0$

b) $y - 2x + 3 = 0$

c) $2y + x + 3 = 0$

d) $y + 2x + 9 = 0$

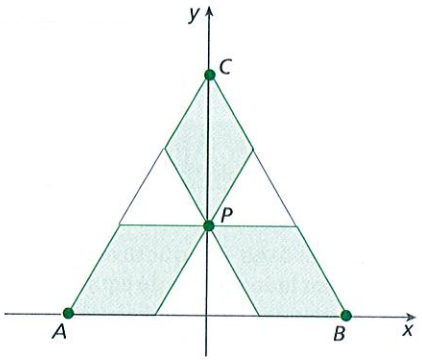
e) $2y + x - 9 = 0$

30. (Fuvest-SP) Sejam $A(0, 0)$, $B(8, 0)$ e $C(-1, 3)$ os vértices de um triângulo e $D(u, v)$ um ponto do segmento $\overline{BC}$. Sejam E o ponto de intersecção de $\overline{AB}$ com a reta que passa por D e é paralela ao eixo y e F o ponto de intersecção de $\overline{AC}$ com a reta que passa por D e é paralela ao eixo x.

a) Determine, em função de u, a área do quadrilátero $AEDF$. $A(u) = -\frac{17}{54}u^2 + \frac{64}{27}u + \frac{32}{27}$

b) Determine o valor de u para o qual a área do quadrilátero $AEDF$ é máxima. $\frac{64}{17}$

31. (Fuvest-SP) Considere os pontos $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 3)$ e $P(0, \alpha)$, com $0 < \alpha < 3$. Pelo ponto P, traçamos as três retas paralelas aos lados do triângulo ABC.



ADILSON SECCO

a) Determine, em função de α, a área da região sombreada da figura. $A = -\alpha^2 + 2\alpha + 3$

b) Para que valor de α essa área é máxima? 1

Desafio

32. Qual é a equação da reta que passa pelo ponto $P(3, 1)$, intercepta a reta r: $y = 3x$ em A e a reta s: $y = -\frac{x}{5}$ em B, sendo P ponto médio de $\overline{AB}$? $x + y - 4 = 0$

33. (Mackenzie-SP) A equação de uma reta, paralela à reta $x + y - 4 = 0$ e distante $3\sqrt{2}$ do ponto $P = (2, 1)$, é: alternativa a

a) $x + y + 3 = 0$

b) $x + y + 9 = 0$

c) $x + y - 3 = 0$

d) $x - y - 6 = 0$

e) $x + y - 12 = 0$

Autoavaliação

Leia atentamente as questões a seguir e responda-as em seu caderno.

1. O polígono de vértices $A(2, 0)$, $B(1, 1)$, $C(1, 5)$ e $D(0, 3)$ é um: alternativa c

a) trapézio
b) retângulo
c) quadrilátero
d) paralelogramo

2. A distância entre os pontos $A(1, -5)$ e $B(6, -2)$ é: alternativa a

a) $\sqrt{34}$ **b)** 36 **c)** $\sqrt{108}$ **d)** 6

3. O triângulo de vértices $A(7, 1)$, $B(3, 5)$ e $C(10, 4)$ é: alternativa d

a) isósceles
b) retângulo isósceles
c) equilátero
d) escaleno

4. A ▬▬▬ da reta que passa pelos pontos (0, 2) e (1, 4) é $y = 2x + 2$. alternativa b

a) equação geral
b) equação reduzida
c) equação segmentária
d) equação paramétrica

5. As retas de equações $y = \frac{1}{2}x + 11$ e $y = -2x - 6$ são: alternativa a

a) concorrentes perpendiculares
b) paralelas coincidentes
c) paralelas distintas
d) reversas

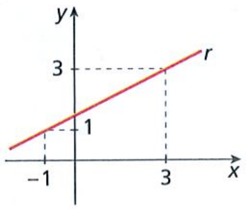
6. A reta r, de equação ▬▬▬, passa pelo ponto $P(1, -3)$ e é perpendicular à reta s, de equação $2x - y + 2 = 0$. alternativa d

a) $x - 3y + 2 = 0$
b) $6x + 2y + 1 = 0$
c) $-x - y + 4 = 0$
d) $x + 2y + 5 = 0$

7. A distância entre o ponto $A(1, 0)$ e a reta $y = x$ é: alternativa c

a) $\sqrt{2}$ **b)** 1 **c)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **d)** 2

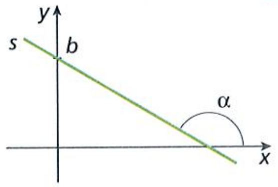
8. A reta s, de equação ▬▬▬, é paralela à reta r e passa por $P(-2, -1)$. alternativa b



ADILSON SECCO

a) $5x + 3y - 1 = 0$
b) $-x + 2y = 0$
c) $2x - 3y + 5 = 0$
d) $8x + 3y - 7 = 0$

9. A equação da reta s apresentada na figura é: alternativa d



ADILSON SECCO

a) $y \cdot \text{sen}\ \alpha - x \cdot \cos \alpha - b \cdot \cos \alpha = 0$
b) $y \cdot \cos \alpha - b \cdot \cos \alpha = 0$
c) $x \cdot \text{sen}\ \alpha - b \cdot \cos \alpha = 0$
d) $y \cdot \cos \alpha - x \cdot \text{sen}\ \alpha - b \cdot \cos \alpha = 0$

10. O ponto ▬▬▬ está no semiplano que representa a inequação $y + 2x + 1 \geqslant 0$. alternativa c

a) $A(-1, -1)$
b) $B(-2, 0)$
c) $C(0, 1)$
d) $D\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

11. A área do quadrilátero de vértices $A(0, 2)$, $B(0, 0)$, $C(2, 0)$ e $D(3, 5)$ é: alternativa c

a) 2^1 **b)** 2^2 **c)** 2^3 **d)** 2^4

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão										
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Representar pontos, segmentos e retas no plano cartesiano.	X							X	X	X	
Calcular a distância entre dois pontos.		X	X								
Escrever de diferentes formas a equação de uma reta.				X		X		X	X		
Discutir posições relativas entre duas retas.			X		X	X		X			
Calcular a distância entre ponto e reta.							X				
Resolver inequações do 1º grau com duas variáveis e sistemas.										X	
Calcular a área de um triângulo.											X
Páginas do livro referentes ao conceito	80 a 84	84 a 87	84 a 90	92 a 104	105 a 112	108 a 110	113 a 115	105 a 107	92 a 104	115 a 117	117 a 119

Capítulo 5

Circunferência

FREDERIC PITCHAL/SYGMA/CORBIS/LATINSTOCK

Localização

O LHC (Grande Colisor de Hádrons) é um anel subterrâneo com 26.659 metros de circunferência. Ele está localizado na região noroeste de Genebra, na fronteira franco-suíça. A instalação, que faz parte do CERN (Organização Europeia para Pesquisa Nuclear), demorou 20 anos para ser construída e custou mais de 10 bilhões de dólares.

1 Equações da circunferência

Desde a Antiguidade alguns povos se preocupam em estudar a circunferência. Por exemplo, no papiro *Rhind* (texto matemático escrito pelo egípcio Ahmes por volta de 1650 a.C.), encontramos problemas envolvendo o cálculo de área e a relação entre a circunferência e o círculo de mesmo diâmetro.

Por volta de 300 a.C., o matemático grego Euclides (c. 325-265) escreveu a obra intitulada *Elementos*, na qual descreve construções com régua e compasso, ou seja, usando retas e circunferências.

Mais tarde, René Descartes (1596-1650) contribuiu para o desenvolvimento da Geometria analítica e para o estudo das cônicas, que envolve a circunferência.

E não parou por aí. Hoje em dia, o estudo da circunferência pode ser notado em experimentos científicos, como na construção do maior acelerador de partículas do mundo (veja infográfico acima).

1.1 A circunferência como lugar geométrico

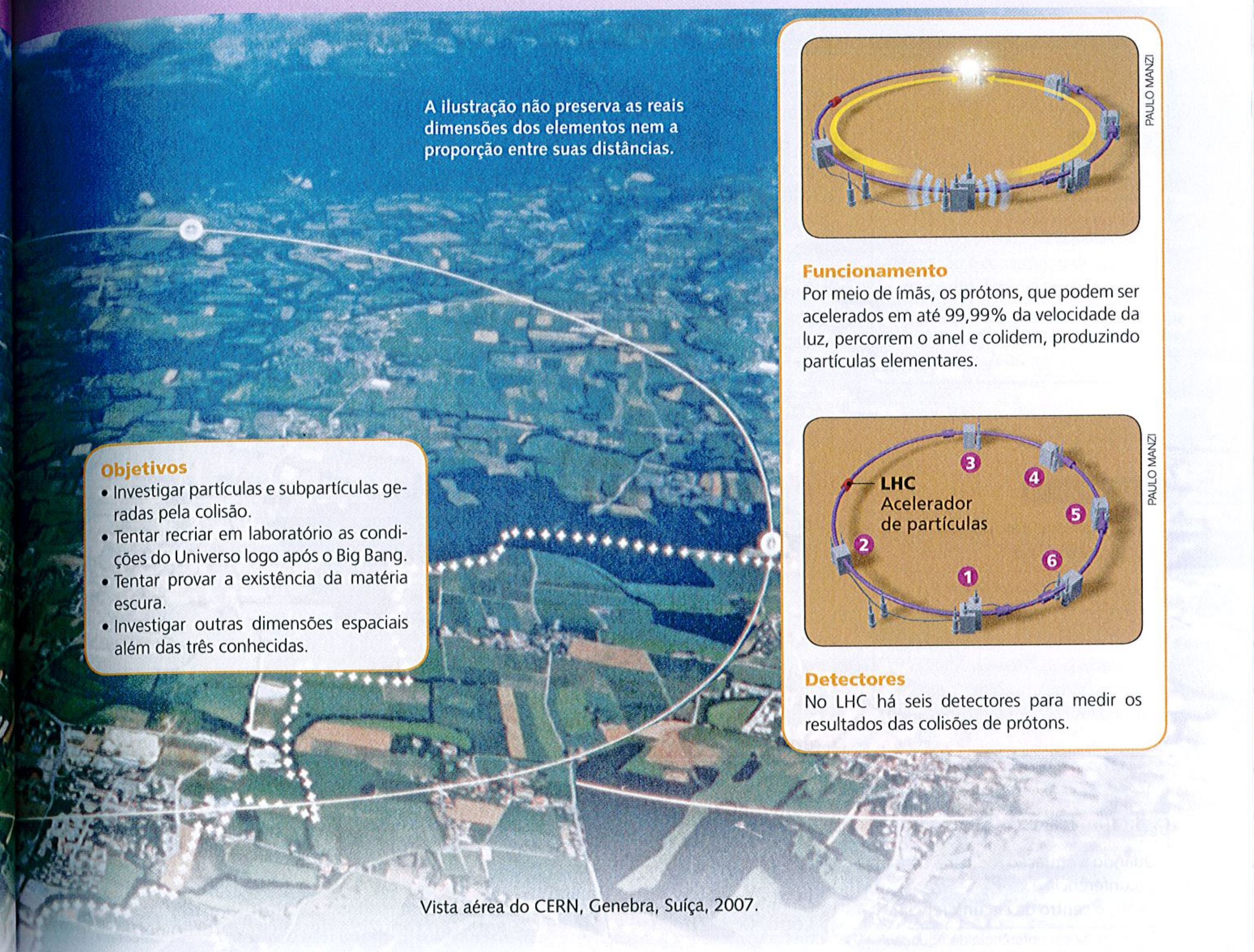
Quando analisamos figuras geométricas com base em certa propriedade, estamos estudando um lugar geométrico. Veja a definição abaixo:

Lugar geométrico plano é um conjunto de pontos do plano que partilham uma propriedade, de modo que:

- todos esses pontos atendam à tal propriedade; e,
- somente esses pontos tenham a tal propriedade.

Objetivos do capítulo

- Identificar equações de uma circunferência.
- Discutir posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências.
- Representar graficamente equações e inequações.
- Resolver graficamente sistemas de inequações.



A ilustração não preserva as reais dimensões dos elementos nem a proporção entre suas distâncias.

PAULO MANZI

Funcionamento

Por meio de ímãs, os prótons, que podem ser acelerados em até 99,99% da velocidade da luz, percorrem o anel e colidem, produzindo partículas elementares.

PAULO MANZI

Detectores

No LHC há seis detectores para medir os resultados das colisões de prótons.

Objetivos

- Investigar partículas e subpartículas geradas pela colisão.
- Tentar recriar em laboratório as condições do Universo logo após o Big Bang.
- Tentar provar a existência da matéria escura.
- Investigar outras dimensões espaciais além das três conhecidas.

Vista aérea do CERN, Genebra, Suíça, 2007.

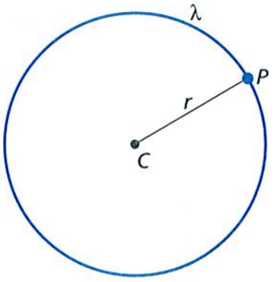
1.2 Definição de circunferência

Na Geometria analítica, estudamos a circunferência como um lugar geométrico, pois ela é um conjunto de pontos que obedecem à seguinte propriedade: todos estão à mesma distância do centro; além disso, *todos* os pontos da circunferência, e *somente* eles, atendem a essa propriedade.

Veja a definição:

Dados um ponto fixo *C* do plano e uma distância *r*, a **circunferência** λ é o lugar geométrico dos pontos *P* do plano que estão à mesma distância *r* de *C*.

A distância *r* é chamada de **raio**, e *C*, de **centro**.



ADILSON SECCO

KUMAR SRISKANDAN/ALAMY/OTHER IMAGES

Roda gigante London Eye e barcos às margens do rio Tâmisa, Londres, 2012.

1.3 Equação reduzida da circunferência

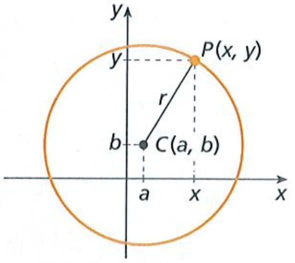
Assim como no capítulo anterior obtivemos a equação da reta, podemos determinar a equação da circunferência.

A partir de sua definição como lugar geométrico, vamos estabelecer uma relação para um ponto qualquer $P(x, y)$ que pertence à circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r. Observe a figura:

Reflita

Que condição r deve satisfazer?

Enfatizar e dar exemplos de que o raio da circunferência é sempre maior que zero.



ADILSON SECCO

Observação

Distância entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$:

$d_{A,\,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

O ponto $P(x, y)$ pertence à circunferência se, e somente se, $d_{C,\,P} = r$.

Logo: $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

A equação descrita acima é conhecida como **equação reduzida da circunferência** de centro $C(a, b)$ e raio r.

Exemplo

Determinar a equação reduzida da circunferência de raio $r = 3$ e centro $C(-2, 1)$.

Tomando um ponto $P(x, y)$ qualquer da circunferência, temos:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$[x - (-2)]^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

Logo, $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ é a equação reduzida dessa circunferência.

Reflita

Quando a equação reduzida da circunferência é $x^2 + y^2 = r^2$, qual é o centro da circunferência?

O centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$ é $C(0, 0)$.

Exercícios resolvidos

R1. Verificar se os pontos $A(6, -3)$ e $B(4, 0)$ pertencem à circunferência de raio 4 e centro $(2, -3)$.

▸ ***Resolução***

Primeiro vamos encontrar a equação reduzida dessa circunferência:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + [y - (-3)]^2 = 4^2$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

Para saber se os pontos A e B pertencem à circunferência, vamos substituir suas coordenadas na equação obtida.

- Substituindo as coordenadas de $A(6, -3)$ na equação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$, temos:

  $(6 - 2)^2 + (-3 + 3)^2 = 16$

  $4^2 + 0^2 = 16 \Rightarrow 16 = 16$

  Como obtemos uma sentença verdadeira, o ponto $A(6, -3)$ pertence à circunferência.

- Substituindo as coordenadas de $B(4, 0)$ na equação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$, temos:

  $(4 - 2)^2 + (0 + 3)^2 = 16$

  $2^2 + 3^2 = 16 \Rightarrow 4 + 9 = 16 \Rightarrow 13 = 16$

  Como obtemos uma sentença falsa, o ponto $B(4, 0)$ não pertence à circunferência.

R2. Determinar as coordenadas do centro C e o raio r de uma circunferência a partir de sua equação $(x + 1)^2 + y^2 = 16$.

▸ ***Resolução***

Podemos encontrar o centro e o raio da circunferência comparando a equação dada com a equação na forma reduzida:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

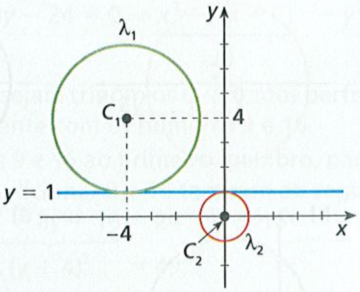
$(x + 1)^2 + y^2 = 16$

Como $a = -1$ e $b = 0$, então $C(-1, 0)$.

Como $r^2 = 16$, então $r = 4$.

Portanto, o centro é $C(-1, 0)$ e o raio é 4.

R3. Observando o gráfico, determinar o centro, o raio e a equação reduzida de cada circunferência, sabendo que a reta $y = 1$ é tangente às duas circunferências.



ADILSON SECCO

▸ ***Resolução***

A circunferência λ_1 tem centro $C_1(-4, 4)$ e raio $r = 3$.

Logo, a equação reduzida de λ_1 é:

$(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 9$

A circunferência λ_2 tem centro $C_2(0, 0)$ e raio $r = 1$.

Logo, a equação reduzida de λ_2 é:

$x^2 + y^2 = 1$

Observação

Dada a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$, em que a, b e $c \in \mathbb{R}$:

- se $c > 0$, então o gráfico da equação no plano cartesiano é uma circunferência.
- se $c = 0$, então o gráfico da equação é constituído de apenas um ponto, que é o ponto (a, b).
- se $c < 0$, então não há gráfico, pois o conjunto solução da equação é vazio.

R4. Determinar a equação reduzida da circunferência que tem centro $C(-1, -3)$ e passa pelo ponto $P(3, -6)$.

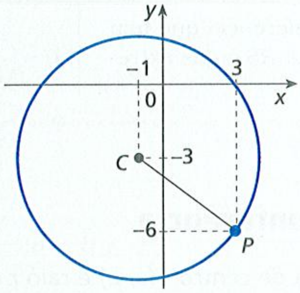
▸ ***Resolução***

O raio dessa circunferência é igual à distância $d_{C,\,P}$.

Assim:

$$r = d_{C,\,P} \Rightarrow r = \sqrt{(3 + 1)^2 + (-6 + 3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{16 + 9} \Rightarrow r = \sqrt{25} \Rightarrow r = 5$$



ADILSON SECCO

Substituindo as coordenadas do centro da circunferência e o valor de r na equação da circunferência, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é:

$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

Reflita

Uma circunferência desenhada no plano cartesiano representa o gráfico de uma função? Justifique.

Não, pois para um mesmo valor de x podem haver dois valores de y correspondentes.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Determine os valores de m, n e p para que a circunferência tenha centro na origem e raio $r = 2$.

a) $(x - 2m)^2 + [y - (1 - n)]^2 = p + 3$ $m = 0, n = 1$ e $p = 1$

b) $\left[x - (|m| - 1)\right]^2 + (y - |n - 1|)^2 = |p|$

$m = \pm 1, n = 1$ e $p = \pm 4$

c) $(x + 2m - 8)^2 + \left(y - 3n + \dfrac{1}{3}\right)^2 = p^2 + p + 2$

$m = 4, n = \dfrac{1}{9}$ e $p = -2$ ou $p = 1$

2. Indique quais dos pontos $P(-2, 1)$, $Q(-1, 3)$, $R(-2, 3)$, $S(0, 1)$ e $T(-1, 0)$ pertencem à circunferência $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$. R e T

3. Escreva a equação do lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que distam 3 unidades do ponto $C(2, -1)$. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

4. Determine, em cada caso, a equação reduzida da circunferência que tem raio r e centro C.

a) $r = 2$ e $C(1, 3)$ $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

b) $r = 4$ e $C(0, 0)$ $x^2 + y^2 = 16$

c) $r = \sqrt{5}$ e $C(3; 0{,}5)$ $(x - 3)^2 + (y - 0{,}5)^2 = 5$

d) $r = \sqrt{13}$ e $C(0, -4)$ $x^2 + (y + 4)^2 = 13$

5. Dê o centro e o raio das circunferências de equações:

a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$ C(1, 2) e $r = 10$

b) $x^2 + (y - 3)^2 = 5$ C(0, 3) e $r = \sqrt{5}$

c) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ C(−3, −2) e $r = 5$

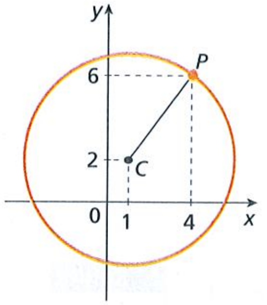
d) $(x - 5)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ C(5, 0) e $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6. Verifique quais das circunferências abaixo se interceptam no ponto (3, 4). μ, γ, β

$\mu: (x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 25$ $\gamma: x^2 + (y - 4)^2 = 9$

$\lambda: (x - 2)^2 + y^2 = 16$ $\beta: x^2 + y^2 = 25$

7. Observe o gráfico abaixo.



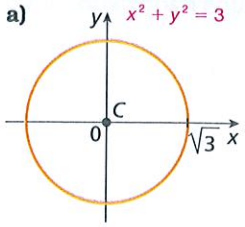
ADILSON SECCO

- Determine a distância entre os pontos C e P, sendo C o centro e P um ponto da circunferência. $d_{C,P} = 5$ unidades de comprimento

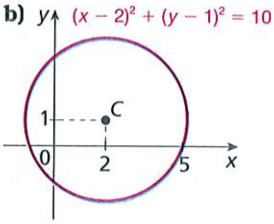
8. Determine a equação da circunferência que tem por diâmetro o segmento de reta RS cujas extremidades são $R(3, 0)$ e $S(-3, 3)$. $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$

9. Obtenha a equação reduzida das circunferências conforme as figuras abaixo.

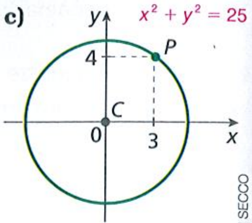
a) $x^2 + y^2 = 3$



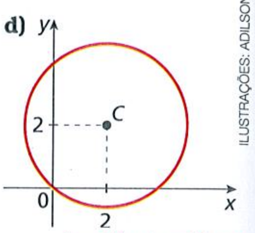
b) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$



c) $x^2 + y^2 = 25$



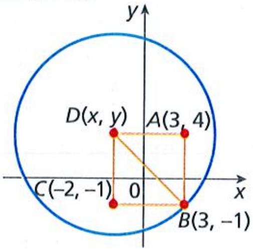
d)



$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

10. Os pontos $A(3, 4)$, $B(3, -1)$, $C(-2, -1)$ e $D(x, y)$ são os vértices de um quadrado cuja medida da diagonal é o raio da circunferência λ, que tem centro D. Determine a equação reduzida de λ. $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 50$



ADILSON SECCO

1.4 Equação geral da circunferência

A **equação geral** da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r é obtida desenvolvendo-se os quadrados da equação reduzida. Veja:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$

Portanto, a equação geral da circunferência é:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Observação

O quadrado da diferença de dois termos é:

$(x - y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$

Essa equação também é chamada de **equação normal** da circunferência.

Observe que essa equação pode ser escrita como $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, em que c é o termo independente e $c = a^2 + b^2 - r^2$. Dessa forma, verificamos que ela é uma equação incompleta do 2º grau com duas variáveis, já que a completa é do tipo: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

Exemplos

a) Representar a circunferência de centro $C(-3, 1)$ e raio $r = 2$ na forma da equação geral.

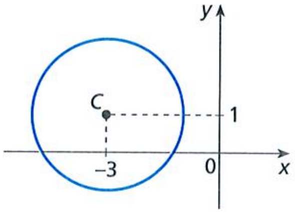
Vamos escrever a equação reduzida da circunferência e depois desenvolver os quadrados.

$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 + 1 - 4 = 0$

Portanto, a equação geral da circunferência é:

$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$



ADILSON SECCO

b) Dada a equação da circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$, determinar o centro C e o raio r.

Para obter o centro e o raio da circunferência, podemos formar o trinômio quadrado perfeito.

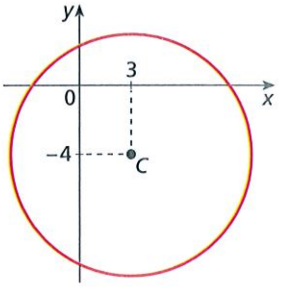
$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 6x + \square}_{\text{(I)}} + \underbrace{y^2 + 8y + \triangle}_{\text{(II)}} = 24 + \square + \triangle$$

Para que (I) e (II) sejam trinômios quadrados perfeitos, precisamos completá-los respectivamente com os números 9 e 16.

Ao adicionarmos 9 e 16 ao primeiro membro, para que a igualdade se mantenha é preciso adicionar 9 e 16 também ao segundo membro. Assim:

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} + \underbrace{y^2 + 8y + 16}_{(y+4)^2} = \underbrace{24 + 9 + 16}_{49}$$

Portanto, o centro da circunferência é $C(3, -4)$ e o raio é 7.



ADILSON SECCO

Exercício resolvido

R5. Seja $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ uma equação completa do 2º grau. Determinar as condições que os coeficientes A, B, C, D, E e F devem cumprir para que a equação dada seja uma circunferência.

▸ ***Resolução***

Vamos transformar em 1 o coeficiente de x^2. Para isso dividiremos a equação por A: $x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$ $(A \neq 0)$

Agora compararemos essa equação com a equação geral da circunferência:

$$\boxed{1}x^2 + \boxed{\frac{B}{A}}y^2 + \cancelto{0}{\frac{C}{A}}xy + \boxed{\frac{D}{A}}x + \boxed{\frac{E}{A}}y + \boxed{\frac{F}{A}} = 0$$

$$\boxed{1}x^2 + \boxed{1}y^2 \boxed{-2a}x \boxed{-2b}y + \boxed{a^2 + b^2 - r^2} = 0$$

Observe que:

$\frac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0$	$\frac{E}{A} = -2b \Rightarrow b = \frac{-E}{2A}$
$\frac{C}{A} = 0 \Rightarrow C = 0$	$\frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2$ $r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$, com $D^2 + E^2 - 4AF > 0$
$\frac{D}{A} = -2a \Rightarrow a = \frac{-D}{2A}$	

Portanto, concluímos que as condições são:

$A = B \neq 0$, $C = 0$ e $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

Observação

$$\frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - \frac{F}{A}$$

$$r^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A}$$

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$$

Observação

A área do círculo de raio r é dada por πr^2.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

11. Determine, se existirem, o centro e o raio da circunferência, em cada caso.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ $C(1, -1)$ e $r = \sqrt{2}$

b) $(x + 1)^2 - (y - 2)^2 = 9$ Não existem.

12. Analise se a equação $4x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 9 = 0$ representa uma circunferência. Não representa.

13. Dada a equação da circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 18y + 8 = 0$, calcule as coordenadas do centro e o raio dessa circunferência, usando para a solução os seguintes critérios:

a) completar quadrados;

b) analisar coeficientes.

a) e **b)** $C(3, -9)$ e $r = \sqrt{82}$

14. Determine a equação geral da circunferência, em cada caso, dados o centro C e o raio r.

a) $C(-3, 2)$ e $r = 3$
$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

b) $C(0, -5)$ e $r = \sqrt{5}$
$x^2 + y^2 + 10y + 20 = 0$

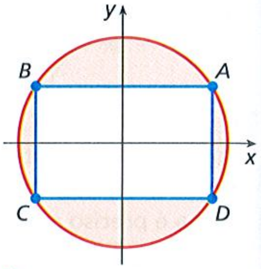
15. Descubra sob que condições a equação a seguir representa uma circunferência:

$x^2 + y^2 + x + y + \dfrac{p}{2} = 0$ $p < 1$

16. (Uece) Num sistema cartesiano utilizado no plano, o ponto P é a intersecção das retas $2x - y - 7 = 0$ e $x - 2y + 7 = 0$, o ponto Q é o centro da circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ e r é o raio dessa circunferência. A distância entre os pontos P e Q é igual a: alternativa d

a) $2r$ **b)** $3r$ **c)** $4r$ **d)** $5r$

17. O quadrilátero $ABCD$ é um retângulo inscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 - 5 = 0$.



ADILSON SECCO

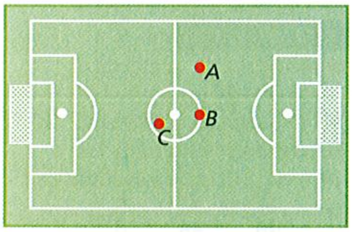
a) Se a abscissa de A é 2, o que você conclui sobre sua ordenada? $y = 1$

b) Determine as coordenadas dos outros três vértices do retângulo.
$B(-2, 1)$, $C(-2, -1)$ e $D(2, -1)$

c) É possível calcular a área da região laranja? Em caso afirmativo, explique como você faria para determiná-la. Sim; a área da região sombreada pode ser calculada pela diferença entre a área do círculo e a área do retângulo.

2 Posições relativas

2.1 Posição relativa entre um ponto e uma circunferência



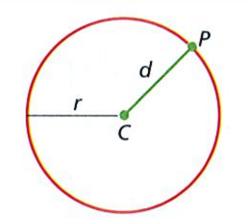
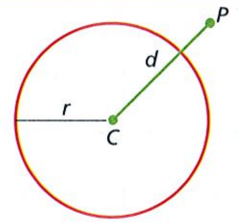
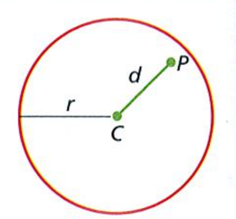
ADILSON SECCO

Os pontos A, B e C representam posições distintas de três jogadores em relação à circunferência do centro do campo de futebol.

As possíveis posições de um ponto $P(x, y)$ do plano em relação a uma circunferência λ de centro C e raio r são: exterior, interior ou pertencente à circunferência.

Para analisar a posição desse ponto em relação à circunferência, comparamos a distância d do ponto ao centro da circunferência com o raio r da circunferência.

Vejamos o quadro abaixo.

$d = r$	$d > r$	$d < r$
 O ponto P pertence à circunferência.	 O ponto P é exterior à circunferência.	 O ponto P é interior à circunferência.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R6. Determinar a posição de cada um dos pontos abaixo em relação à circunferência de equação $x^2 + (y - 2)^2 = 9$.

a) $P(1, 5)$ **b)** $Q(0, 4)$ **c)** $R(3, 2)$

▸ ***Resolução***

Para saber a posição que cada ponto ocupa em relação à circunferência dada, devemos calcular a distância entre cada ponto e o centro da circunferência.

Da equação da circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 9$, temos o centro $C(0, 2)$ e $r = 3$.

Calculando as respectivas distâncias, temos:

a) $d_{C,P} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (5 - 2)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow d_{C,P} = \sqrt{10}$

Como $\sqrt{10} > 3$, então $d_{C,P} > r$; logo, o ponto P é exterior à circunferência.

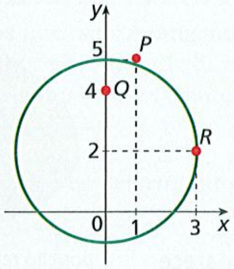
b) $d_{C,Q} = \sqrt{(0 - 0)^2 + (4 - 2)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow d_{C,Q} = \sqrt{4} \Rightarrow d_{C,Q} = 2$

Como $2 < 3$, então $d_{C,Q} < r$; logo, o ponto Q é interior à circunferência.

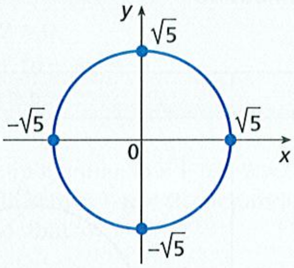
c) $d_{C,R} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-2)^2}$

$d_{C,R} = \sqrt{9} \Rightarrow d_{C,R} = 3$

Então, $d_{C,R} = r$; logo, o ponto R pertence à circunferência.



R7. Observe a circunferência abaixo.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

a) Determinar a equação dessa circunferência.

b) Qual é a posição dos pontos $A\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ e $B(-2, -2)$ em relação à circunferência?

c) Indicar as coordenadas dos pontos pertencentes à circunferência e à bissetriz dos quadrantes ímpares.

▸ ***Resolução***

a) A circunferência tem centro $C(0, 0)$ e raio $r = \sqrt{5}$.

Portanto, a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 5$.

b) Vamos determinar a distância entre cada ponto e o centro da circunferência:

$d_{C,A} = \sqrt{\left(\sqrt{2} - 0\right)^2 + \left(\sqrt{3} - 0\right)^2}$

$d_{C,A} = \sqrt{5}$

Então, $d_{C,A} = r$; logo, o ponto A pertence à circunferência.

$d_{C,B} = \sqrt{(-2-0)^2 + (-2-0)^2}$

$d_{C,B} = \sqrt{8}$

Como $\sqrt{8} > \sqrt{5}$, isto é, $d_{C,B} > r$, o ponto B é exterior à circunferência.

c) Precisamos determinar os pontos de intersecção entre a circunferência $(x^2 + y^2 = 5)$ e a bissetriz dos quadrantes ímpares $(y = x)$. Então:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Para $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$, temos $y = \frac{\sqrt{10}}{2}$ e, para $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, temos $y = -\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Portanto, os pontos procurados são $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

18. Indique a posição do ponto $P(-1, 2)$ em relação à circunferência de:

a) $C(2, 3)$ e $r = 3$ exterior

b) $C(-2, 2)$ e $r = 2$ interior

c) $C(-3, 1)$ e $r = \sqrt{5}$ pertence

19. Identifique a posição do ponto P em relação à circunferência nos seguintes casos:

a) $P(2, -1)$ e $x^2 + (y-3)^2 = 4$ exterior

b) $P(2, 2)$ e $(x-2)^2 + y^2 = 4$ pertence

c) $P(-1, 0)$ e $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ interior

20. Conhecendo a equação $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$, calcule o valor de k para que o ponto $P(k, 1)$ esteja:

a) na circunferência; 4 ou 2

b) no interior da circunferência. $2 < k < 4$

21. Um quadrado tem vértices consecutivos $A(3, 3)$, $B(4, 2)$, $C(3, 1)$ e $D(2, 2)$. Determine no caderno:

a) a equação da circunferência inscrita nesse quadrado; $(x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{2}$

b) a equação da circunferência circunscrita ao quadrado; $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$

c) a área da coroa circular formada pelas circunferências. $\frac{\pi}{2}$ unidade de área

22. (UFPB) Considerando as seguintes proposições relativas à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no plano cartesiano, identifique a(s) verdadeira(s):

(01) O ponto $P(-1, 1)$ é interior à circunferência.

(02) O ponto $P(-2, 2)$ é exterior à circunferência.

(04) O ponto $P\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ está sobre a circunferência.

(08) A reta de equação $y = x$ intercepta a circunferência em dois pontos.

(16) A reta de equação $y = -x + 2$ intercepta a circunferência em um único ponto.

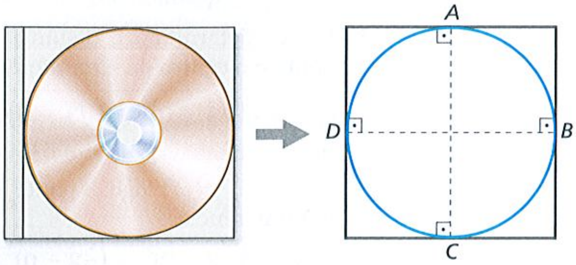
- Qual é a soma das alternativas corretas?

$1 + 2 + 4 + 8 = 15$

2.2 Posição relativa entre uma reta e uma circunferência

Observe a ilustração.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO



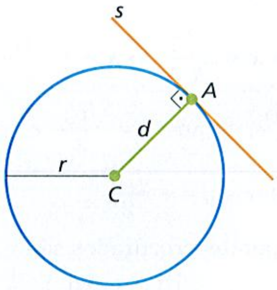
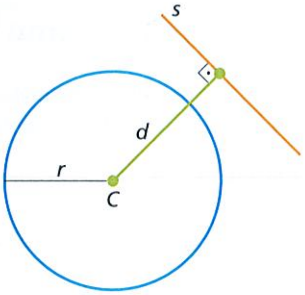
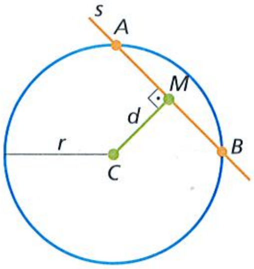
PHOTODISC/
GETTY IMAGES

A posição relativa entre as cordas e a boca do violão lembra retas secantes a uma circunferência (2000).

A parte da caixa onde está o CD parece um quadrado, e a borda do CD parece uma circunferência. Imaginando as retas que passam pelos lados do quadrado, podemos observar que cada uma delas é tangente à circunferência da borda do CD.

Dadas uma reta s e uma circunferência λ de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r, ambas no mesmo plano, há três casos possíveis para a posição relativa entre s e λ:

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

$d = r$	$d > r$	$d < r$
 s é tangente à circunferência	 s é exterior à circunferência	 s é secante à circunferência

Da observação dos três casos acima concluímos que:

- se $d = r$, então $s \cap \lambda = \{A\}$ (s é tangente à circunferência λ);
- se $d > r$, então $s \cap \lambda = \varnothing$ (s é exterior à circunferência λ);
- se $d < r$, então $s \cap \lambda = \{A, B\}$ (s é secante à circunferência λ).

Exercícios resolvidos

R8. Determinar a posição relativa entre a reta s de equação $x + y + 1 = 0$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.

▸ ***Resolução***

Primeiro, vamos obter o centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ comparando-a com a equação geral:
$x^2 + y^2 - 2ax - 2bx + a^2 + b^2 - r^2 = 0$
Como $-2a = 2$, então $a = -1$. Como $-2b = 2$, então $b = -1$.
Portanto, o centro da circunferência é $C(-1, -1)$.
Substituindo $a = b = -1$ em $a^2 + b^2 - r^2 = 1$, obtemos $r = 1$.
Agora vamos calcular a distância do centro da circunferência à reta s:

$$d_{C,s} = \frac{|1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $d_{C,s} < r$, então a reta s é secante à circunferência.

Observação

Uma reta s tangente a uma circunferência de centro $C(x, y)$ é perpendicular ao raio, de medida r, no ponto de contato quando:

$$r = d_{C,s} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Reflita

Como ficaria o esboço, em um mesmo plano, da reta $x + y + 1 = 0$ e da circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ que acabamos de analisar?

Ver resolução no Guia do professor.

R9. É dada a equação da circunferência μ: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0$
Determinar a equação geral da reta v tangente a μ no ponto $P(-3, -1)$.

▸ ***Resolução***

Vamos determinar as coordenadas do centro C da circunferência:

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20 \Rightarrow C(1, 1)$

Lembremos que, se v é tangente a μ, então v é perpendicular à reta que passa por $C(1, 1)$ e $P(-3, -1)$, que chamamos de w.

Vamos determinar o coeficiente angular m_w da reta w:

$$m_w = \frac{-1 - 1}{-3 - 1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Com isso podemos determinar o coeficiente angular m_v da reta v:

$$m_v = \frac{-1}{m_w} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Logo, a equação da reta v é: $y + 1 = -2(x + 3) \Rightarrow 2x + y + 7 = 0$

Observação

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 =$
$= 18 + 1 + 1$
$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$

Observação

Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ tais que $x_A \neq x_B$. O coeficiente angular da reta r determinada pelos pontos A e B é:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

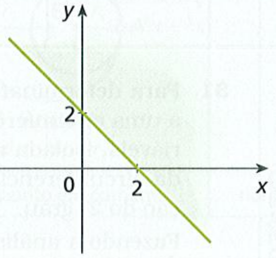
Se r e s são retas perpendiculares, então $m_r \cdot m_s = -1$.

R10. Representar no plano cartesiano o sistema de inequações:

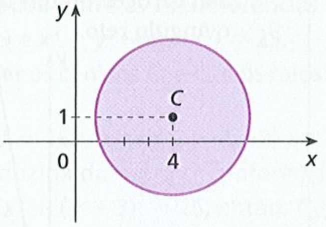
$$\begin{cases} x + y - 2 \geqslant 0 \\ (x - 4)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 9 \end{cases}$$

▸ ***Resolução***

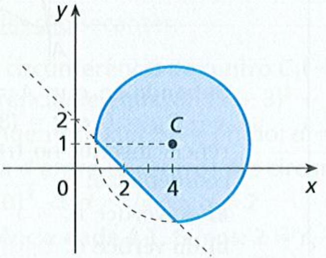
A primeira inequação $x + y - 2 \geqslant 0$ representa um semiplano situado acima da reta $x + y = 2$, incluindo a própria reta. Portanto, teremos o gráfico abaixo:



A segunda inequação $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 9$ representa a reunião de todos os pontos da circunferência $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$ com todos os pontos interiores a ela. Como a circunferência tem centro $C(4, 1)$ e raio $r = 3$, temos o seguinte gráfico:



A solução do sistema é a representação gráfica da intersecção dos dois conjuntos obtidos anteriormente. Logo, temos:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R11. Obter os valores de k para que a reta $y = x + k$ seja tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

Resolução

Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} y = x + k \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$

Substituindo $y = x + k$ na equação da circunferência, temos:

$x^2 + (x + k)^2 - 9 = 0$

$x^2 + x^2 + 2kx + k^2 - 9 = 0$

$2x^2 + 2kx + (k^2 - 9) = 0$ (equação do 2º grau)

$\Delta = (2k)^2 - 4 \cdot 2(k^2 - 9)$

Como $\Delta = 0$, temos:

$-4k^2 + 72 = 0 \Rightarrow k^2 = 18 \Rightarrow k = 3\sqrt{2}$ ou $k = -3\sqrt{2}$

Reflita

Qual é a posição relativa entre as duas retas determinadas por $k = 3\sqrt{2}$ e $k = -3\sqrt{2}$?

retas paralelas distintas

Observação

Para haver a tangência, a equação do 2º grau em x deve admitir soluções iguais. Daí a condição: $\Delta = 0$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

23. Determine, em cada caso, a posição relativa da reta s em relação à circunferência. Se houver pontos comuns (tangente ou secante), determine esses pontos.

a) s: $x + y = 6$ e $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$ tangente, $P(3, 3)$

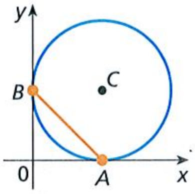
b) s: $x - y = 1$ e $x^2 + y^2 = 1$ secante, $A(1, 0)$ e $B(0, -1)$

c) s: $y = x + 3$ e $x^2 + y^2 - 2x = 0$ exterior

24. Para quais valores de k a reta $y = x + k$ é tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$? $-2\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$

25. A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$ é tangente ao eixo x no ponto A e é tangente ao eixo y no ponto B.

Determine o comprimento do segmento AB.



ADILSON SECCO

$4\sqrt{2}$ unidades de comprimento

26. Determine as equações das retas s_1 e s_2 que são tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 49 = 0$ e paralelas ao eixo x. s_1: $y - 7 = 0$ s_2: $y + 7 = 0$

27. Represente graficamente no plano as seguintes inequações: Ver resolução no Guia do professor.

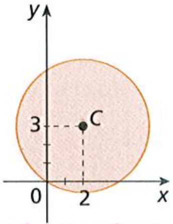
a) $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 \geqslant 9$ **b)** $(x - 4)^2 + y^2 < 16$

28. Qual é a área do círculo representado pela inequação $x^2 + (y - 1)^2 - 1 \leqslant 0$? π unidades de área

29. Qual é o comprimento da circunferência representada pela equação $x^2 + y^2 = 25$? 10π unidades de comprimento

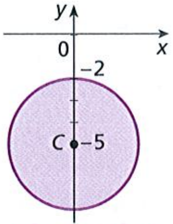
30. Escreva no caderno a inequação ou o sistema correspondente a cada gráfico:

a)



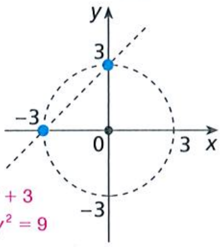
$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 13$

b)



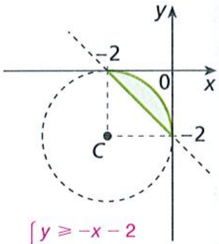
$x^2 + (y + 5)^2 \leqslant 9$

c)



$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

d)



$\begin{cases} y \geqslant -x - 2 \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 4 \end{cases}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

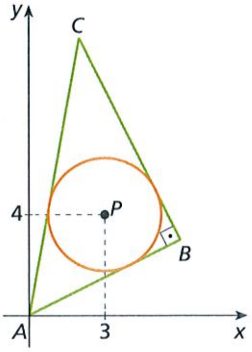
31. Para determinar a posição de uma reta relativa a uma circunferência, substituímos uma das variáveis, isolada na equação da reta, na equação da circunferência e obtemos, assim, uma equação do 2º grau.

Fazendo a análise do discriminante dessa equação do 2º grau, determine a posição da reta em relação à circunferência quando:

$\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$

$\Delta > 0$, a reta é secante.
$\Delta = 0$, a reta é tangente.
$\Delta < 0$, a reta é exterior.

32. (Fuvest-SP) Na figura abaixo, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo, sendo $\hat{B}$ o ângulo reto.



ADILSON SECCO

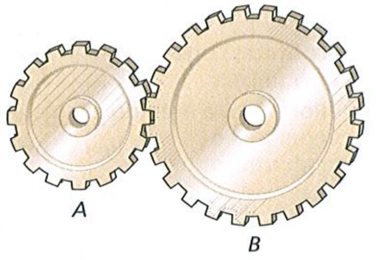
Sabendo-se que $A = (0, 0)$, B pertence à reta $x - 2y = 0$ e $P = (3, 4)$ é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC, determinar as coordenadas:

a) do vértice B. (6, 3)

b) do vértice C. (2, 11)

2.3 Posição relativa entre duas circunferências

Observe, na ilustração ao lado, que, em apenas uma engrenagem, já temos a ideia de duas circunferências: uma desenhada pelo topo dos dentes da engrenagem e outra pela base das cavas. Abstraindo as quatro circunferências da ilustração das duas engrenagens, podemos classificá-las, duas a duas, quanto a suas posições relativas. Vejamos como proceder.

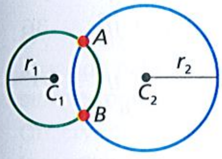
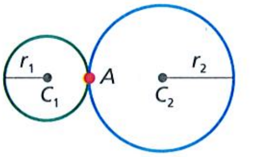
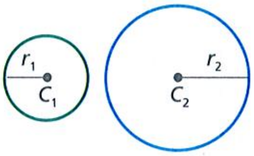
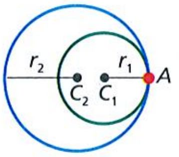
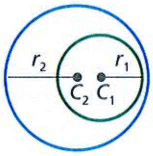


ADILSON SECCO

CORBIS-LATINSTOCK

Cena do filme *Tempos modernos* (EUA, 1936), direção de Charles Chaplin. O filme critica a massificação do ser humano com o advento da era industrial, retratando-o como mera engrenagem de um grande sistema.

Considerando duas circunferências, λ_1 e λ_2, distintas num mesmo plano, podemos analisar a posição relativa entre λ_1 e λ_2 comparando a distância d entre seus centros C_1 e C_2 com os raios das circunferências, como vemos no quadro a seguir.

Circunferências secantes	Circunferências tangentes	Circunferências disjuntas
 $\lvert r_1 - r_2 \rvert < d < r_1 + r_2$	 exteriores $d = r_1 + r_2$	 exteriores $d > r_1 + r_2$
	 interiores $d = \lvert r_1 - r_2 \rvert$	 interiores $0 \leqslant d < \lvert r_1 - r_2 \rvert$
dois pontos em comum	um ponto em comum	nenhum ponto em comum

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

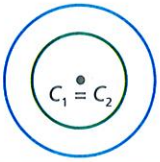
Reflita

Se duas circunferências são tangentes, é possível traçar um triângulo cujos vértices sejam o ponto de tangência e os centros das circunferências?

Espera-se que o aluno perceba que não é possível, pois os pontos são colineares.

Observação

Quando $d = 0$, as circunferências λ_1 e λ_2 são **concêntricas**, ou seja, têm o mesmo centro.



ADILSON SECCO

Para saber quantos são os pontos comuns entre duas circunferências basta saber seus raios e a distância entre seus centros. E, para saber quais são esses pontos, é preciso resolver o sistema formado pelas equações a elas associadas.

Exemplos

a) Determinar a posição relativa entre as circunferências $(x + 2)^2 + (y - 12)^2 = 169$ e $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25$.

Primeiro vamos determinar os centros C_1 e C_2 e os raios r_1 e r_2 de cada circunferência.

Como $(x + 2)^2 + (y - 12)^2 = 169$, então $C_1(-2, 12)$ e $r = 13$.

Escrevendo a equação reduzida da outra circunferência, temos:

$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25 \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 25$, então: $C_2(0, 3)$ e $r = 5$

Agora vamos determinar a distância d entre os centros C_1 e C_2:

$d = \sqrt{[0 - (-2)]^2 + (3 - 12)^2} \Rightarrow d = \sqrt{85}$

Observe que $\lvert 13 - 5 \rvert < \sqrt{85} < 13 + 5$, ou seja: $\lvert r_1 - r_2 \rvert < d < r_1 + r_2$

Portanto, as circunferências são secantes.

b) Determinar a equação da circunferência de centro $C_1(-1, 0)$ e que tangencia exteriormente a circunferência de equação $(x + 3)^2 + y^2 = 1$.

As circunferências são tangentes exteriores; então: $d = r_1 + r_2$

Vamos calcular a distância d entre os centros das circunferências:

$d = \sqrt{[-3 - (-1)]^2 + (0 - 0)^2} \Rightarrow d = \sqrt{4} \Rightarrow d = 2$

Como o raio da circunferência dada é 1, temos: $2 = r_1 + 1 \Rightarrow r_1 = 1$

Portanto, a equação da circunferência é: $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

Observação

Da equação $(x + 3)^2 + y^2 = 1$, temos $C_2(-3, 0)$ e $r_2 = 1$.

c) Calcular a área do círculo de centro (2, 5) sabendo que a reta $3x + 4y = 6$ é tangente ao círculo.

A reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de contato. Logo: $r = \dfrac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|6 + 20 - 6|}{5} \Rightarrow r = 4$

Portanto, a área do círculo é 16π unidades de área.

Exercícios propostos

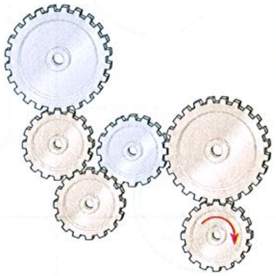
Registre as respostas em seu caderno

33. Determine em cada caso, mentalmente, a posição relativa de duas circunferências de raios r_1 e r_2, sabendo que d é a distância entre seus centros.

a) $r_1 = 4$ cm; $r_2 = 2$ cm; $d = 2$ cm tangentes interiores
b) $r_1 = 4$ cm; $r_2 = 2$ cm; $d = 5$ cm secantes
c) $r_1 = 6$ cm; $r_2 = 4$ cm; $d = 10$ cm tangentes exteriores
d) $r_1 = 6$ cm; $r_2 = 2$ cm; $d = 1$ cm disjuntas interiores
e) $r_1 = 5$ cm; $r_2 = 3$ cm; $d = 0$ cm concêntricas
f) $r_1 = 6$ cm; $r_2 = 4$ cm; $d = 12$ cm disjuntas exteriores

34. Observe o sistema de engrenagens e responda no caderno.

- Em que sentido gira a engrenagem superior, de cor prata? anti-horário


ADILSON SECCO

35. Em cada caso, determine a posição relativa das circunferências.

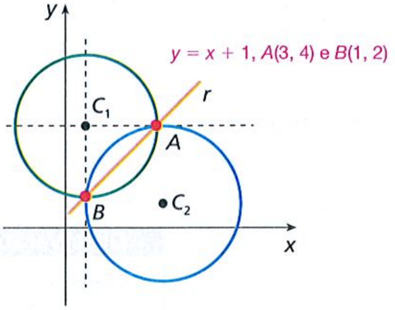
a) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ e $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$ secantes
b) $x^2 + y^2 = 25$ e $x^2 + y^2 = 16$ disjuntas interiores e concêntricas

36. Desenhe duas circunferências que tenham apenas um ponto de intersecção e uma reta que seja, ao mesmo tempo, tangente a uma e secante à outra. Ver resolução no Guia do professor.

37. Obtenha as coordenadas dos pontos comuns às circunferências de equações $x^2 + y^2 - 4x = 0$ e $x^2 + y^2 - 16x = 48$. Não há pontos comuns.

38. As equações das circunferências da figura são:
$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ e
$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$

Determine a equação da reta r e encontre as coordenadas dos pontos A e B.

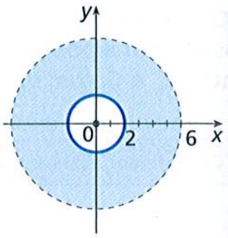


$y = x + 1$, $A(3, 4)$ e $B(1, 2)$

ADILSON SECCO

39. Escreva o sistema de inequações que descreve o gráfico ao lado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 36 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$



ADILSON SECCO

40. Resolva graficamente os sistemas. Ver resoluções no Guia do professor.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x - y \geq 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x > 0 \\ x^2 - y^2 - 10x < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 81 \\ x - y \geq 7 \end{cases}$

41. Qual é a equação da circunferência cujo centro é a origem, que é tangente à reta de equação $4x + 3y = 20$? Calcule a área delimitada por essa circunferência. $x^2 + y^2 = 16$ e $A = 16\pi$ unidades de área

42. (Unifesp) Na figura **A** aparecem as circunferências α, de equação $x^2 + y^2 = 1$, e β, de equação $x^2 + y^2 = 9$. Sabendo-se que as circunferências tangentes simultaneamente a α e a β são como λ_1 (na figura **B**) ou λ_2 (na figura **C**):

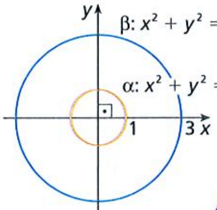


Figura A

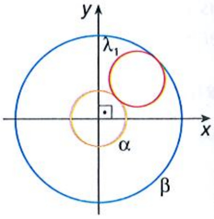


Figura B

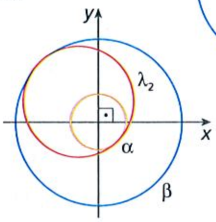


Figura C

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

o lugar geométrico dos centros dessas circunferências é dado: alternativa c

a) pelas circunferências de equações $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ e $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.
b) pela elipse de equação $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{x^2}{3^2} = 1$.
c) pelas circunferências de equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.
d) pela circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.
e) pelas retas de equações $y = x$ e $y = -x$.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. Seja, num jogo de tiro ao alvo, um grupo de 4 circunferências concêntricas. Se elas têm raio de 1 cm, 2 cm, 3 cm e 4 cm, determine o tamanho da maior corda possível da circunferência maior que não determine corda na circunferência imediatamente anterior. $2\sqrt{7}$ cm

2 (UEL-PR) Dois círculos concêntricos têm raios 3 e 5 centímetros. Desenha-se um segmento de reta, com maior comprimento possível, inteiramente contido na região interna ao círculo maior e externa ao círculo menor. Qual o comprimento desse segmento? alternativa c

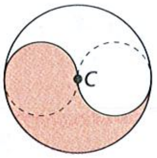
a) 7,0 cm **c)** 8,0 cm **e)** 9,0 cm

b) 7,5 cm **d)** 8,5 cm

3. Determine a equação da circunferência que tem diâmetro definido pelos pontos $A(-2, 1)$ e $B(0, -3)$. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

4. O yin-yang representa, na cultura oriental, a unidade formada pelo equilíbrio de duas forças de igual intensidade, porém opostas.

Observe que a circunferência maior tem centro C e raio r e que as duas circunferências menores se tangenciam em C. Agora responda às perguntas.



ADILSON SECCO

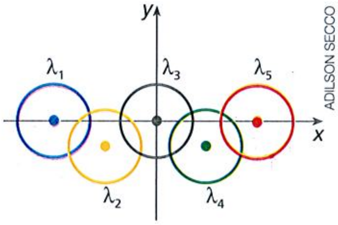
a) A área do círculo maior é quantas vezes a área da parte colorida? 2 vezes

b) O comprimento da circunferência maior é igual ao perímetro da parte colorida? Como você explicaria isso? Ver resolução no Guia do professor.

c) Qual é a área do círculo maior se o raio da circunferência menor é 3? 36π unidades de área

5. Dada a circunferência $\lambda\ x^2 + y^2 + 4x + 10y + 28 = 0$. Determine o ponto de λ de abscissa mínima. $(-3, -5)$

6. Imagine a construção do símbolo olímpico conforme a figura:



ADILSON SECCO

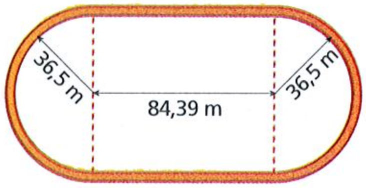
A circunferência λ_3 com centro na origem tem raio igual a 5 cm. As circunferências λ_1 e λ_5 têm seus centros a 14 cm do centro de λ_3. Os centros de λ_2 e λ_4 estão a $\sqrt{64}$ cm do centro de λ_3 e têm ordenada igual a -4.

Determine a equação das cinco circunferências que representam o símbolo olímpico.

7. Determine a, b e c de modo que a equação $36x^2 + ay^2 + bxy + 24x - 12y + c = 0$ represente uma circunferência. $a = 36$, $b = 0$ e $c < 5$

8. Qual é o ponto da circunferência $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$ que tem ordenada máxima? $(4, -2)$

9. (Enem) O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raias e tem largura de 9,76 m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.



ADILSON SECCO

BIEMBENGUT, M. S. Modelação matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus, 1990. Dissertação de Mestrado. IGCE/Unesp, Rio Claro, 1990 (adaptado).

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado? alternativa a

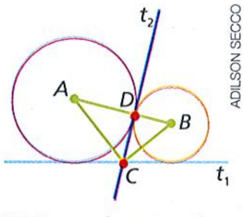
a) 1 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 7 **e)** 8

Aprofundamento

10. Uma circunferência λ passa pelos pontos (2, 0), (2, 4) e (0, 4). Qual é a distância do centro de λ à origem. $\sqrt{5}$ unidades de comprimento

11. A reta s passa pelo ponto (0, 3) e é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ em que $A = (0, 0)$ e B é o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20$. Determine a equação de s. $x + 2y = 6$

12. (Fuvest-SP) A figura representa duas circunferências de raio R e r com centros nos pontos A e B, respectivamente, tangenciando-se externamente no ponto D. Suponha que:



ADILSON SECCO

a) as retas t_1 e t_2 são tangentes a ambas as circunferências e interceptam-se no ponto C;

b) a reta t_2 é tangente às circunferências no ponto D.

Calcule a área do triângulo ABC em função dos raios R e r. $A = \dfrac{(R + r) \cdot \sqrt{r \cdot R}}{2}$

13. Considere o quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados e circunscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 12 = 0$. Determine a equação das retas que contêm as diagonais desse quadrado. $x + y = 7$ e $x - y = -1$

14. Resolva graficamente o sistema: $\begin{cases} |x| > 1 \\ x^2 + y^2 \leqslant 9 \end{cases}$
Ver resolução no Guia do professor.

Desafio

15. Um quadrado está inscrito numa circunferência de centro (1, 2). Um de seus vértices é o ponto $(-3, -1)$. Determine os outros três vértices do quadrado. $(-3, 5)$, $(5, -1)$ e $(5, 5)$

16. Quantos pontos têm coordenadas inteiras e são interiores à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 6$? 21 pontos

6. λ_1: $(x + 14)^2 + y^2 = 25$ λ_2: $\left(x + 4\sqrt{3}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$ λ_3: $x^2 + y^2 = 25$ λ_4: $\left(x - 4\sqrt{3}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$ λ_5: $(x - 14)^2 + y^2 = 25$

Autoavaliação

Leia atentamente as questões a seguir e responda-as em seu caderno.

1. As representações gráficas das equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 0$ são, respectivamente: alternativa d

a) uma circunferência e dois pontos.
b) uma circunferência e uma reta.
c) uma reta e uma circunferência.
d) uma circunferência e um ponto.

2. O centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x = 0$ são: alternativa a

a) $C(3, 0)$ e $r = 3$
b) $C(0, 0)$ e $r = 6$
c) $C(0, 3)$ e $r = 3$
d) $C(0, 0)$ e $r = 3$

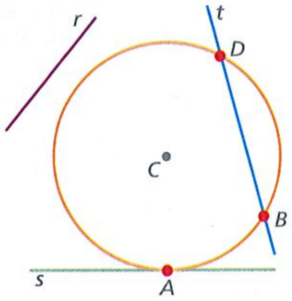
3. Para que a equação $mx^2 + 4y^2 + 8x + 12y + 14 = 0$ represente uma circunferência, devemos ter: alternativa b

a) $m = 8$
b) $m = 4$
c) $m = 12$
d) $m = 2$

4. A reta s tangencia a circunferência λ no ponto A, portanto, A ____ a λ. alternativa b

a) é exterior
b) pertence
c) é interior
d) não pertence

5. Observando a figura, podemos dizer que a reta ____ à circunferência. alternativa b



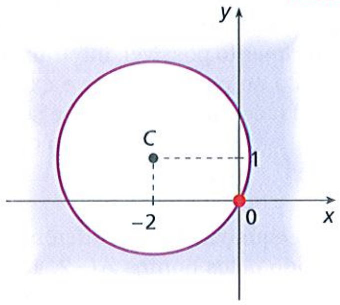
ADILSON SECCO

a) t é tangente
b) r é exterior
c) s é secante
d) t é exterior

6. As circunferências λ_1 e λ_2 são distintas, estão no mesmo plano e têm dois pontos em comum; portanto, elas são: alternativa a

a) secantes
b) tangentes
c) disjuntas
d) concêntricas

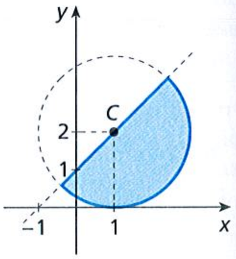
7. A figura abaixo é a representação gráfica de: alternativa c



ADILSON SECCO

a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 3$
b) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 5$
c) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 \geq 5$
d) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \geq 4$

8. A figura ao lado é a representação gráfica do sistema de inequações dado por: alternativa a



ADILSON SECCO

a) $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 2 \\ x - y - 1 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x + 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 16 \\ 2x - y + 1 > 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 1 \\ x - y + 2 < 0 \end{cases}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Identificar equações de uma circunferência.	X	X	X					
Discutir posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências.				X	X	X		
Representar graficamente equações e inequações.	X						X	X
Resolver graficamente sistemas de inequações.								X
Páginas do livro referentes ao conceito	124 a 128	128 a 130	128 a 130	130 a 134	132 a 134	135 e 136	132 a 134	132 a 134

Pesquisa e ação

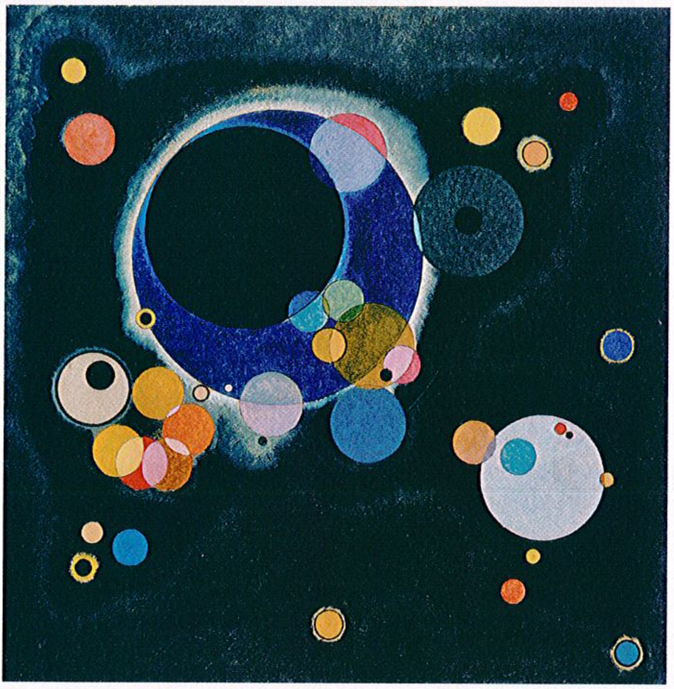
Arte e Matemática

Esta atividade permite o desenvolvimento interdisciplinar com Educação Artística.

A arte abstrata surgiu em contraposição à arte figurativa, no sentido de explorar novas possibilidades de forma e cor. O uso de formas geométricas é bastante valorizado, como a composição de triângulos, quadrados, retângulos, linhas, círculos e circunferências. Foi um movimento que teve muitos desdobramentos, como você poderá estudar a seguir.

A partir da pesquisa de cinco artistas que desenvolveram trabalhos em arte abstrata, você será estimulado a desenvolver uma percepção artística e a explorar figuras geométricas e circunferências na composição de uma atividade.

KANDINSKY, WASSILY/LICENCIADO POR AUTVIS, BRASIL, 2013 - NEW ORLEANS MUSEUM OF ART, NOVA ORLEANS, ESTADOS UNIDOS



Wassily Kandinsky, *Círculos*, 1926.

Procedimentos

1) Reúna-se com mais quatro colegas e pesquisem sobre arte abstrata e arte figurativa e por que a arte abstrata surgiu em contraposição à arte figurativa.

2) Agora, escolham um dos cinco artistas citados abaixo, todos representantes da arte abstrata:

- Wassily Kandinsky;
- Paul Klee;
- Robert Delaunay;
- Frantisek Kupka;
- Kasimir Malevich.

3) Em seguida, pesquisem a biografia do artista escolhido, criando, com o uso de um *software* específico, uma apresentação que será projetada na sala de aula. Essa biografia deve conter os dados de nascimento e morte do artista, o início de sua carreira artística, a trajetória e o momento em que desenvolveu os trabalhos na arte abstrata.

4) O grupo deverá escolher algumas obras do artista que apresentem elementos geométricos, como retas, triângulos e, principalmente, circunferências. Fiquem atentos também às cores usadas por ele e procurem compreender a justificativa que cada artista deu às suas obras. As cores também eram objeto de estudo para esse grupo de artistas.

5) A última etapa desse trabalho é a criação de um painel feito pelo grupo, com figuras geométricas diversas, incluindo, como elemento principal, as circunferências. Utilizem instrumentos geométricos nessa construção. O uso de régua, esquadros e compasso serão fundamentais para a qualidade do seu trabalho. O grupo deverá colorir esse painel, a partir de uma concepção pré-estabelecida. Discutam quais cores desejam empregar. Utilizem como referência o artista escolhido. Vocês poderão usar colagem de papéis, tintas, giz de cera etc. A definição do material será feita pelo grupo.

6) Todos os trabalhos da sala poderão ser expostos em uma mostra, relacionando Arte e Matemática.

Esta atividade permite o desenvolvimento interdisciplinar com Física.

Compreensão de texto

A Matemática do GPS

O que é e como funciona o GPS?

A sigla GPS nada mais é do que a abreviatura de Global Positioning System (sistema de posicionamento global). Trata-se de uma constelação de vinte e quatro satélites, orbitando em torno da Terra a uma altura aproximada de 20.200 km acima do nível do mar, permitindo a receptores conhecer sua posição em qualquer lugar sobre a Terra com uma notável precisão.

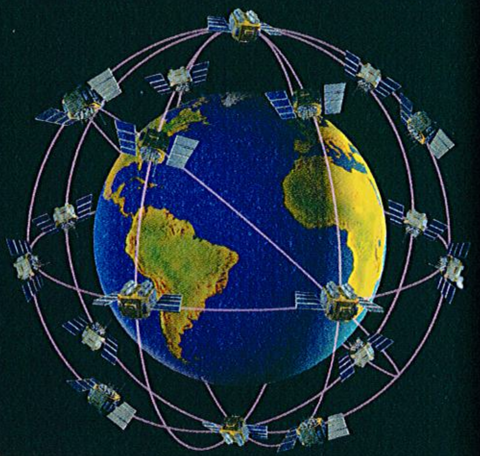
[...]

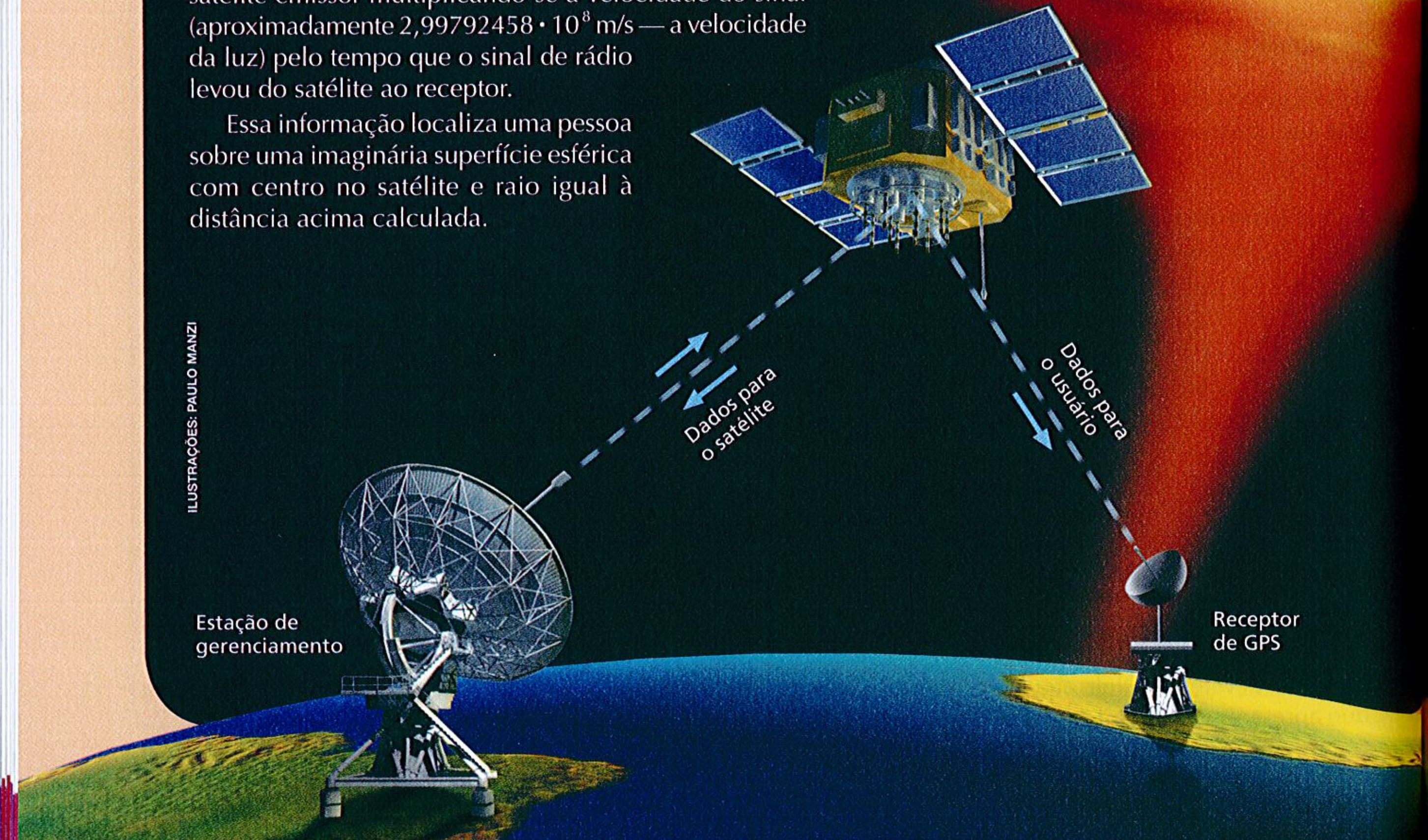
Os 24 satélites que formam o segmento espacial do GPS trafegam em torno da Terra em seis órbitas estáveis e predeterminadas com quatro satélites em cada órbita. Os satélites percorrem uma órbita completa a cada 12 horas e cada satélite tem 28° de visualização sobre a Terra. Isso assegura que todo ponto da superfície terrestre, em qualquer instante, esteja visualizado por pelo menos quatro satélites. Várias áreas da Terra são, por alguns momentos, visualizadas por até dez satélites. [...]

Afinal, de que maneira o GPS determina a localização de um ponto sobre a superfície terrestre?

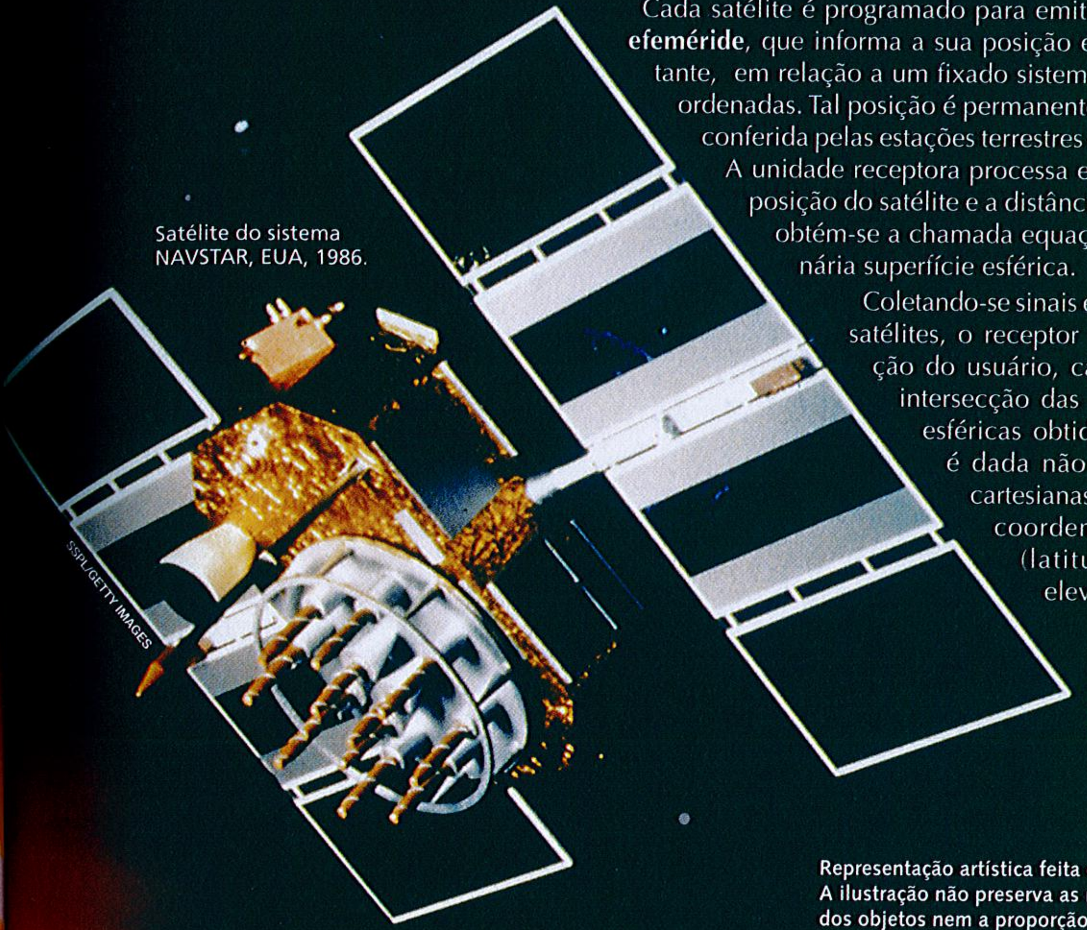
Cada um dos satélites do GPS transmite por rádio um padrão fixado, que é recebido por um receptor na Terra (segmento do usuário), funcionando como um cronômetro extremamente acurado. O receptor mede a diferença entre o tempo que o padrão é recebido e o tempo que foi emitido. Essa diferença, não mais do que um décimo de segundo, permite que o receptor calcule a distância ao satélite emissor multiplicando-se a velocidade do sinal (aproximadamente $2{,}99792458 \cdot 10^8$ m/s — a velocidade da luz) pelo tempo que o sinal de rádio levou do satélite ao receptor.

Essa informação localiza uma pessoa sobre uma imaginária superfície esférica com centro no satélite e raio igual à distância acima calculada.





ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI



Satélite do sistema NAVSTAR, EUA, 1986.

SSPL/GETTY IMAGES

Cada satélite é programado para emitir o que se chama **efeméride**, que informa a sua posição exata, naquele instante, em relação a um fixado sistema ortogonal de coordenadas. Tal posição é permanentemente rastreada e conferida pelas estações terrestres de gerenciamento. A unidade receptora processa esses sinais. Com a posição do satélite e a distância acima calculada obtém-se a chamada equação geral da imaginária superfície esférica.

Coletando-se sinais emitidos por quatro satélites, o receptor determina a posição do usuário, calculando-a como intersecção das quatro superfícies esféricas obtidas. A localização é dada não em coordenadas cartesianas, mas por meio das coordenadas geográficas (latitude, longitude e elevação).

[...]

Fonte: ALVES, Sérgio. A Matemática do GPS. In: *Revista do Professor de Matemática*, n. 59, p. 17-26, 2006.

Representação artística feita em computador. A ilustração não preserva as reais dimensões dos objetos nem a proporção entre suas distâncias.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno

1. De acordo com o texto, quantas órbitas sobre a Terra cada um desses satélites completa em um dia? 2 órbitas

2. Considerem a relação $\Delta s = v \cdot \Delta t$ e os dados do texto sobre a altitude e a velocidade do sinal emitido pelo satélite. Quanto tempo o sinal leva para chegar a um receptor que está na superfície da Terra, em uma reta que passa pelo satélite e pelo centro da Terra? aproximadamente 0,067 s

3. Considerem o raio médio da Terra igual a 6.370 km. Aproximadamente, quantos quilômetros percorre um desses satélites em uma órbita circular em torno da Terra na altitude de 20,2 km? 40.150 km

4. Vimos que, dados um ponto fixo C e uma distância r, a circunferência λ é o lugar geométrico dos pontos P do plano que estão à mesma distância r de C.

Desenhem no caderno: quantos pontos comuns têm duas circunferências de raios 3 cm e 5 cm, respectivamente, cujos centros distam 9 cm? E se os centros forem distantes 8 cm? E se forem distantes 7 cm? nenhum ponto; um único ponto; dois pontos

5. De modo análogo à circunferência, uma superfície esférica S de centro C e raio r é definida como o lugar geométrico dos pontos P do espaço que estão à mesma distância r de C.

Imaginem para responder: quantos pontos comuns têm duas superfícies esféricas de raios 3 cm e 5 cm cujos centros distam 9 cm? E se os centros forem distantes 8 cm? E se forem distantes 7 cm? nenhum ponto; um único ponto; infinitos pontos

6. Que figura plana é formada pelos pontos comuns a duas superfícies esféricas de raios 4 cm e 2 cm, respectivamente, cujos centros distam 5 cm? uma circunferência

Capítulo 6

Cônicas

RICHARD WAINSCOAT/ALAMY/OTHER IMAGES

O cometa Halley é visto da Terra a cada 76 anos, a última vez foi em 1986, como registrado na foto feita por um observatório na Austrália. Sua próxima aparição será em 2061.

Objetivos do capítulo

- Identificar as cônicas em situações reais.
- Diferenciar as elipses, as parábolas e as hipérboles.
- Associar as cônicas com suas respectivas equações.
- Associar os gráficos de cônicas com suas equações, bem como as equações com os gráficos de cônicas.

1 Secções cônicas

As cônicas são curvas que incluem as circunferências, as parábolas, as elipses e as hipérboles.

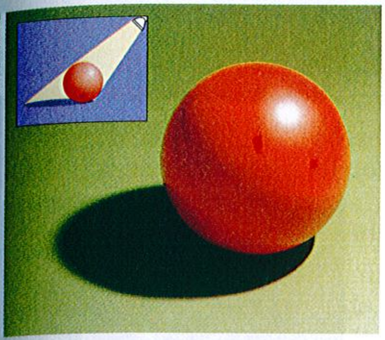
No capítulo anterior, já estudamos as circunferências; neste, estudaremos as demais cônicas.

Por causa de algumas de suas propriedades, as cônicas têm várias aplicações na Astronomia, na Óptica, na Engenharia, na Arquitetura e nas novas tecnologias. Na Astronomia, por exemplo, elas estão presentes na trajetória elíptica dos planetas ao redor do Sol e na trajetória de cometas no sistema solar.

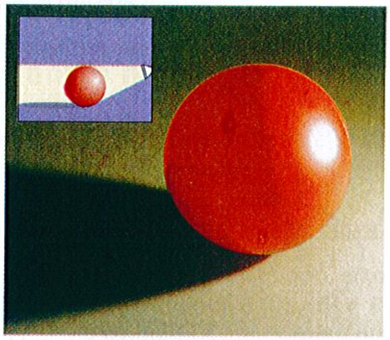
1.1 Ideia de secções de uma superfície cônica

Observe na página seguinte a bola que está sobre uma mesa em uma sala escura. Ao iluminar a bola com uma lanterna, é possível perceber que o formato da sombra se modifica de acordo com a posição da lanterna.

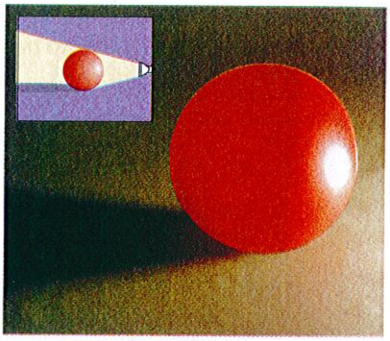
Os contornos de cada sombra da bola têm a forma de uma curva. Chamadas de **cônicas**, essas curvas diferentes podem representar elipses, trechos de parábolas e trechos de hipérboles.


JAVIER JAIME

Elipse


JAVIER JAIME

Parábola

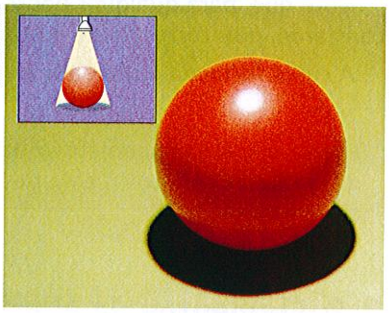

JAVIER JAIME

Hipérbole

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

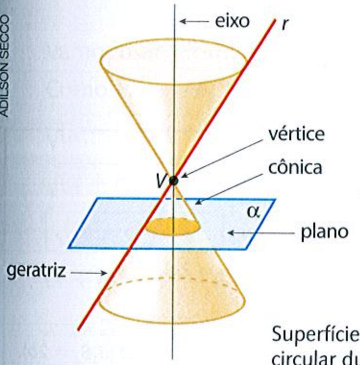
No século III a.C., o matemático grego Apolônio de Perga deu uma importante contribuição à Geometria com sua obra *As cônicas*, mostrando como obtê-las por meio da intersecção de um plano com uma superfície cônica circular dupla — daí a origem do nome **secções cônicas**.

Obtemos uma superfície cônica circular dupla, com vértice *V*, por meio da rotação de uma reta *r* em torno de um eixo, concorrente com esse eixo. A figura abaixo representa uma superfície cônica circular dupla interceptada pelo plano α.


JAVIER JAIME

ADILSON SECCO

O contorno dessa sombra lembra que cônica? circunferência



ADILSON SECCO

Superfície cônica circular dupla reta.

No esquema à esquerda, como o plano α não passa pelo vértice *V*, intercepta todas as geratrizes da superfície cônica e é perpendicular ao eixo. A cônica obtida é uma circunferência.

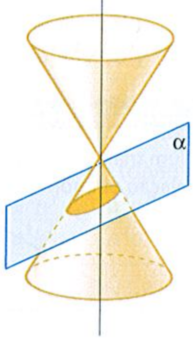
Variando a inclinação do plano α em relação ao eixo, pode-se demonstrar que obtemos as três cônicas que estudaremos neste capítulo: a **elipse**, a **hipérbole** e a **parábola**.

Observação

Embora a superfície cônica seja infinita, para facilitar sua visualização, preferimos ilustrá-la como se fosse limitada.

Elipse

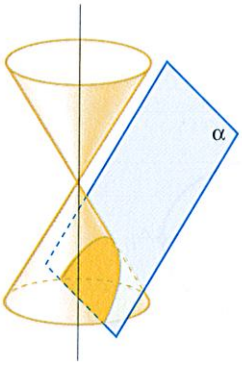
Se o plano α interceptar todas as geratrizes da superfície cônica obliquamente ao eixo, teremos:



Essa cônica é chamada de *elipse*.

Parábola

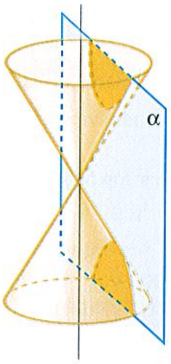
Se o plano α for paralelo a uma geratriz, teremos:



Essa cônica é chamada de *parábola*.

Hipérbole

Se o plano α for paralelo ao eixo, teremos:



Essa cônica é chamada de *hipérbole*.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2 A elipse

2.1 Traçado e definição da elipse

Em vários objetos e situações do dia a dia podemos observar a forma da elipse.

Para traçar uma elipse, vamos marcar sobre o plano dois pontos, F_1 e F_2, distantes $2c$ um do outro. Em cada ponto fixamos, com o auxílio de dois percevejos, a extremidade de um barbante de comprimento $2a$, sendo $2a > 2c$ (figura I). Então, posicionando um lápis junto ao barbante, de modo que este se mantenha esticado, traçamos uma curva (figura II).

COREL/STOCK PHOTOS

A borda da mesa lembra uma elipse.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

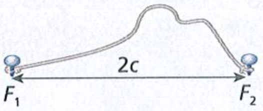


Figura I

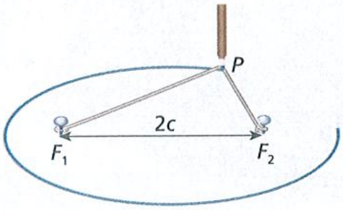
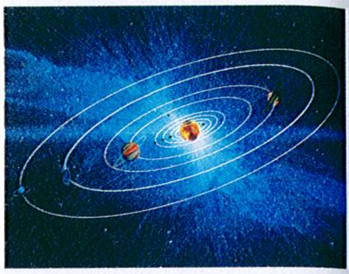


Figura II


VICTOR HABBICK VISIONS/SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK

Representação artística feita por computador mostrando as órbitas, em formato de elipse, dos planetas do sistema solar.

Note que, para qualquer ponto P pertencente à curva, a distância $PF_1 + PF_2$ é constante, pois corresponde ao comprimento do barbante.

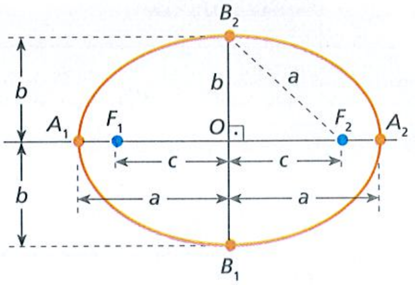
A curva formada é chamada de elipse e pode ser assim definida:

Elipse é o lugar geométrico dos pontos P de um plano cuja soma de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2, desse plano, é constante e maior que a distância entre eles.

2.2 Elementos da elipse

A figura abaixo representa alguns elementos importantes da elipse.

ADILSON SECCO

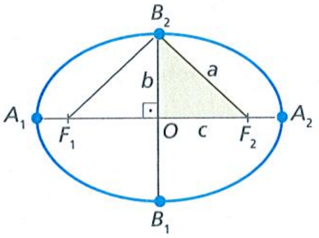


- **Focos:** são os pontos F_1 e F_2.
- **Distância focal:** é a distância entre os focos ($2c = F_1F_2$).
- **Eixo maior:** é o segmento $\overline{A_1A_2}$, que passa pelos focos ($A_1A_2 = 2a$).
- **Centro:** é o ponto O, ponto médio de $\overline{A_1A_2}$.
- **Eixo menor:** é o segmento $\overline{B_1B_2}$, perpendicular a $\overline{A_1A_2}$, que passa por O ($B_1B_2 = 2b$).
- **Excentricidade (e):** é a razão $e = \frac{c}{a}$, sendo $0 < e < 1$.

2.3 Relação entre *a*, *b* e *c*

Observe a elipse:

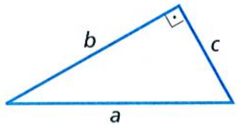
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO



Com base no triângulo retângulo OB_2F_2, podemos escrever a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

Observação

Num triângulo retângulo, vale a relação pitagórica:



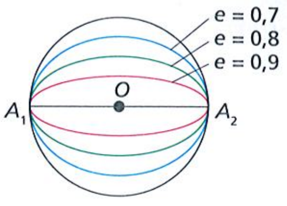
$$a^2 = b^2 + c^2$$

2.4 Excentricidade

Ao observar várias elipses, você perceberá que algumas são bem próximas a uma circunferência e outras são mais achatadas. Essa característica da elipse é determinada por um número, a excentricidade e.

Como $e = \frac{c}{a}$ e $c < a$, a excentricidade e está entre 0 e 1.

- Se e for próximo de 0, a elipse é mais próxima a uma circunferência.
- Se e for próximo de 1, a elipse é mais achatada.



ADILSON SECCO

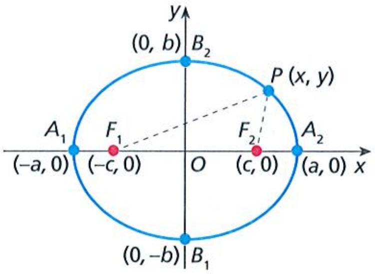
Quanto mais os focos se distanciam do centro da elipse, mais achatada é a elipse. No entanto, quanto mais os focos se aproximam de seu centro, mais próxima a uma circunferência é a elipse.

2.5 Equação da elipse com centro na origem

Fixando um sistema de coordenadas cujos eixos contêm os eixos da elipse, vamos obter a equação da elipse. Há dois casos a serem considerados.

■ Caso 1: eixo maior da elipse sobre o eixo das abscissas

Considere uma elipse com centro O na origem do sistema cartesiano, eixo maior de coordenadas $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$, com $a > 0$, eixo menor $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$, com $b > 0$, e focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, com $c > 0$. Escolhemos um ponto P qualquer sobre essa elipse, com coordenadas (x, y).



ADILSON SECCO

Vamos usar a fórmula da distância entre dois pontos para obter a equação da elipse.

Como $PF_1 + PF_2 = 2a$, temos:

$$\sqrt{[x-(-c)]^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left[\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2=\left[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}+\cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}$$

$$4cx-4a^2=-4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$

$$\left(cx-a^2\right)^2=\left(-a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2-2cxa^2+(a^2)^2=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$c^2x^2-\cancel{2cxa^2}+a^4=a^2x^2-\cancel{2cxa^2}+a^2c^2+a^2y^2$$

$$c^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$$

$$a^4-a^2c^2=a^2x^2+a^2y^2-c^2x^2$$

$$a^2(a^2-c^2)=x^2(a^2-c^2)+a^2y^2 \text{ (I)}$$

Como $b^2 = a^2 - c^2$, podemos substituir em (I):

$a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2$ (dividindo os 2 membros por a^2b^2)

$$\frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}}=\frac{x^2\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}}+\frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2}$$

Portanto: $$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b>0}$$

Essa é a equação reduzida da elipse de focos no eixo das abscissas e centro (0, 0).

Se achar conveniente, comentar com os alunos que algumas órbitas elípticas são mais "achatadas" que outras. A órbita da Terra, por exemplo, é quase circular, enquanto a de Mercúrio é mais achatada. É possível ilustrar isso apresentando aos alunos a excentricidade das órbitas dos planetas do sistema solar:

Planeta	Excentricidade
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056
Urano	0,047
Netuno	0,009

Esta atividade permite o desenvolvimento interdisciplinar com Geografia.

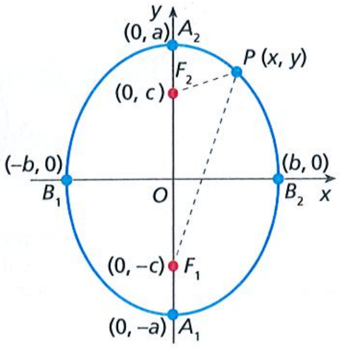
Observação

No desenvolvimento da fórmula, temos:

- Pela relação entre a, b e c:
  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2$
- Como $a \neq 0$ e $b \neq 0$, $ab \neq 0$, então $a^2b^2 \neq 0$. Logo, podemos dividir a equação por a^2b^2.

COREL/STOCK PHOTOS
VICTOR HABBICK VISIONS/SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK

■ Caso 2: eixo maior da elipse sobre o eixo das ordenadas



ADILSON SECCO

Nesse caso: $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$.

$P(x, y)$ estará na elipse se: $\sqrt{(y + c)^2 + x^2} + \sqrt{(y - c)^2 + x^2} = 2a$

Analogamente ao que fizemos no caso 1, obtemos:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,\ a > b > 0$$

Essa é a equação reduzida da elipse de focos nos eixos das ordenadas e centro em (0, 0).

Exercícios resolvidos

R1. Determinar a equação reduzida da elipse com centro na origem e focos sobre os eixos das abscissas, sendo $F_1(-3, 0)$ e $F_2(3, 0)$, com eixo maior ou igual a 8 unidades.

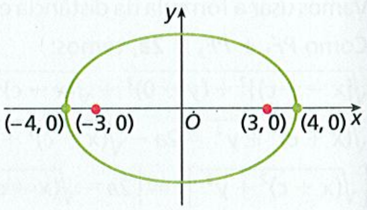
▶ ***Resolução***

Como o eixo maior tem 8 unidades, então $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

A distância do centro a qualquer um dos focos é igual a 3. Logo, $c = 3$.

Pela relação $a^2 = b^2 + c^2$, temos: $4^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b^2 = 7$

Substituindo em $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, obtemos a equação: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$



R2. Seja $x^2 + 4y^2 = 64$ a equação de uma elipse. Determinar as coordenadas de seus focos e as extremidades do eixo menor.

▶ ***Resolução***

Vamos escrever a equação dada na forma reduzida:

$$x^2 + 4y^2 = 64 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{4y^2}{64} = \frac{64}{64} \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Para determinar a e b, precisamos analisar se a elipse determinada por essa equação tem seu eixo maior sobre o eixo das abscissas ou das ordenadas.

Como, na equação reduzida de uma elipse, a é maior que b, podemos concluir que $a^2 = 64$ e $b^2 = 16$. Ou seja, o eixo maior dessa elipse está sobre o eixo das abscissas.

Como $a^2 = 64$ e $b^2 = 16$, então $a = 8$ e $b = 4$. Pela relação $a^2 = b^2 + c^2$:

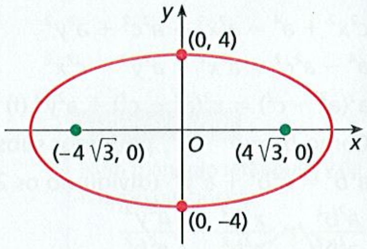
$64 = 16 + c^2$

$64 - 16 = c^2$

$c^2 = 48$

$c = 4\sqrt{3}$

Assim, os focos são $F_1(-4\sqrt{3}, 0)$ e $F_2(4\sqrt{3}, 0)$ e as extremidades do eixo menor são $B_1(0, -4)$ e $B_2(0, 4)$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

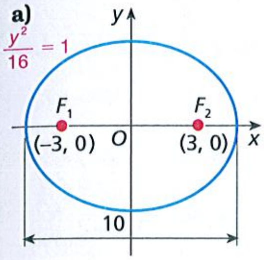
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

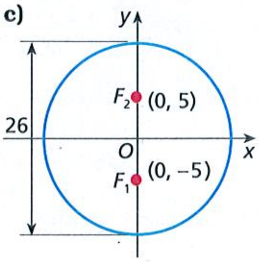
1. Uma elipse tem centro em (0, 0), e $B_1(0, -3)$ e $A_1(-5, 0)$ são pontos extremidades de seus eixos, respectivamente, menor e maior. Determine sua equação. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

2. Obtenha a equação reduzida de cada elipse representada no plano cartesiano.

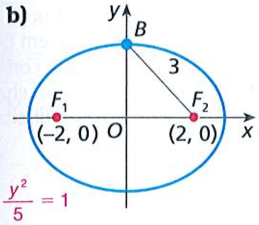
a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$



c)

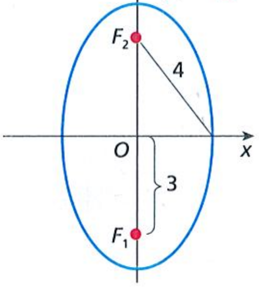


b)



$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

d) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$



2. c) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$

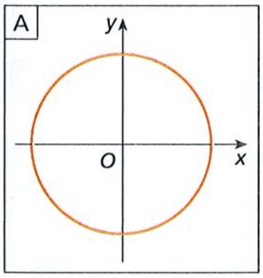
3. Determine a equação reduzida da elipse de cada item.

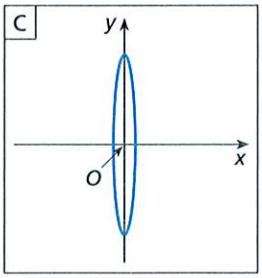
a) $F_1(-1, 0)$ e $F_2(1, 0)$ e $a = 5$; $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$

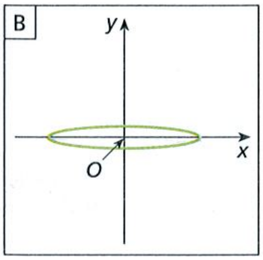
b) $A_1(-5, 0)$ e $A_2(5, 0)$ e $e = 0{,}8$; $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) $B_1(0, -4)$ e $B_2(0, 4)$ e $a = 12$. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{16} = 1$

4. Observe os esboços das elipses. Mesmo sem as medidas, é possível associá-las a uma equação. Analise a forma e a posição de cada elipse e associe a uma equação. Registre e justifique sua resposta. A-II; B-I; C-III







I) $x^2 + 100y^2 = 1$

II) $x^2 + \frac{10y^2}{9} = 1$

III) $100x^2 + y^2 = 1$

5. Determine as coordenadas dos focos e a excentricidade das seguintes elipses: Ver resolução no Guia do professor.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$

b) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) $16x^2 + 9y^2 = 576$

d) $x^2 + 2y^2 = 36$

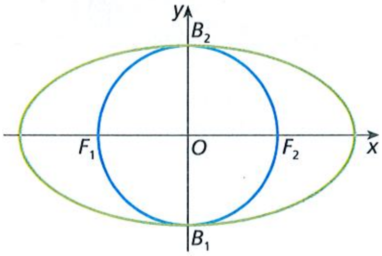
6. Encontre as coordenadas dos focos e das extremidades dos eixos das elipses de equação:

a) $3x^2 + 2y^2 = 6$

b) $4x^2 + 16y^2 = 64$

Ver resolução no Guia do professor.

7. Na elipse representada na figura, a circunferência inscrita tem raio 2, centro na origem e passa pelos focos F_1 e F_2 da elipse. Determine a equação da elipse. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$



8. Esboce os gráficos das elipses de equação: Ver resolução no Guia do professor.

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

c) $4x^2 + 9y^2 = 36$

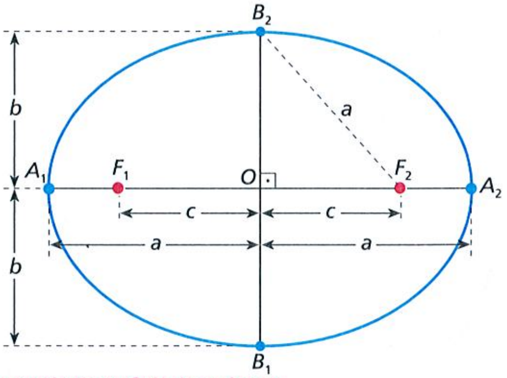
d) $2x^2 + y^2 = 24$

9. Sabendo que uma elipse está centrada na origem do sistema cartesiano e que seus focos estão sobre o eixo das ordenadas, determine sua equação reduzida, sendo a distância focal igual a $2\sqrt{3}$ e $B_2(1, 0)$. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

10. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

10. Determine a equação do conjunto de todos os pontos do plano, tais que a soma das distâncias desses pontos a (−4, 0) e (4, 0) seja sempre igual a 10.

11. Dada a elipse abaixo, demonstre as seguintes propriedades. Você pode fazer esta atividade com um colega.



Ver resolução no Guia do professor.

a) $A_1F_1 = A_2F_2$

b) $A_1A_2 = 2a$

c) $B_1F_1 = B_1F_2 = a$ e $B_2F_1 = B_2F_2 = a$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

ADILSON SECCO

3 A parábola

3.1 Traçado e definição da parábola

Podemos observar parábolas em várias situações, como na trajetória de um jato de água de um chafariz ou na trajetória do ponto luminoso em fogos de artifício. A parábola também é muito utilizada em projetos arquitetônicos.

PAULO FRIDMAN/PULSAR IMAGENS

WALMIR MONTEIRO/SAMBAPHOTO

A ideia de parábola está presente na arquitetura da Ponte JK, em Brasília, 2010 (à esquerda), assim como no traçado da Igreja da Pampulha, em Belo Horizonte, 2011 (à direita).

Para construir uma parábola, vamos traçar uma reta r e marcar um ponto F ($F \notin r$). Depois, cortamos um barbante de comprimento $\overline{AB}$, igual à altura do esquadro (figura I). Com a ajuda de dois percevejos, fixamos uma das pontas do barbante no ponto F e a outra no ponto A do esquadro (figura I). Com um lápis apoiado no esquadro, esticamos o barbante e traçamos metade de uma curva, deslizando o esquadro para a direita (figura II). Para traçar a outra metade da curva, repetimos o processo com o esquadro invertido.

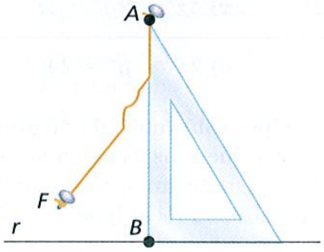


Figura I

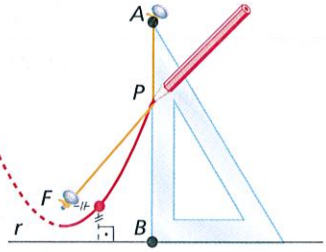


Figura II

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

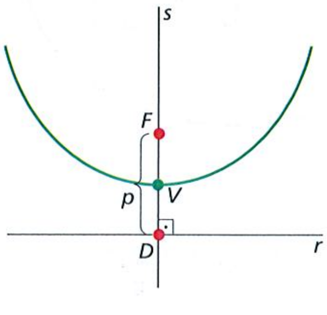
Note que qualquer ponto P pertencente à curva dista o mesmo de F e de r, ou seja, $PB = PF$. Veja: $PB + PA = AB = PF + PA \Rightarrow PB + PA = PF + PA \Rightarrow PB = PF$

A curva formada é chamada de parábola e pode ser assim definida:

> **Parábola** é o lugar geométrico dos pontos P de um plano cuja distância a uma reta r dada é igual à distância a um ponto F não pertencente a r.

3.2 Elementos da parábola

A figura abaixo representa uma parábola com alguns de seus elementos.



ADILSON SECCO

- **Foco:** é o ponto F.
- **Diretriz:** é a reta r.
- **Eixo de simetria:** é a reta s, perpendicular a r, que passa pelo foco.
- **Vértice:** é o ponto V, intersecção da parábola com o eixo de simetria.
- **Parâmetro da parábola:** é a distância p entre o foco e a diretriz, isto é, $p = FD$.

Explore

Com mais quatro colegas, pesquisem, em *sites*, jornais ou revistas, sobre construções arquitetônicas e obras de arte em que aparecem elipses, parábolas e hipérboles.

Elaborem painéis com fotos com os respectivos dados – autor, local, data, curiosidades – e, se possível, organizem junto com o professor uma mostra, com os demais grupos.

Esta atividade permite o desenvolvimento com Educação artística.

Observação

O vértice também pertence à parábola, portanto deve ser equidistante de F e r, ou seja, V é o ponto médio de $\overline{FD}$.

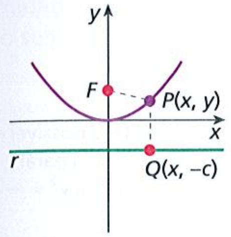
3.3 Equação da parábola com vértice na origem

Vamos considerar uma parábola com vértice V na origem do sistema cartesiano e foco F. Escolhemos um ponto $P(x, y)$ qualquer sobre essa parábola. Sabemos que a distância entre F e P deve ser igual à distância entre P e r (diretriz da parábola), ou seja, $d_{P,F} = d_{P,r}$.

Há dois casos para estudar a equação da parábola com vértice na origem.

<table>
<tr><th>Parábola com eixo de simetria sobre o eixo y e vértice na origem</th><th>Parábola com eixo de simetria sobre o eixo x e vértice na origem</th></tr>
<tr><td>

- $F(0, c)$ e diretriz $y = -c$, com $c > 0$



$d_{P,F} = d_{P,r} \Rightarrow d_{P,F} = d_{P,Q}$

$\left(\sqrt{x^2 + (y - c)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(y + c)^2}\right)^2$

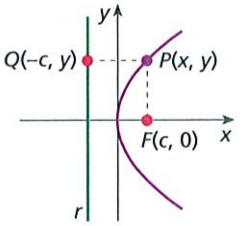
$x^2 + (y - c)^2 = (y + c)^2$

$x^2 + \cancel{y^2} - 2cy + \cancel{c^2} = \cancel{y^2} + 2cy + \cancel{c^2}$

$x^2 = 4cy$

</td><td>

- $F(c, 0)$ e diretriz $x = -c$, com $c > 0$



$d_{P,F} = d_{P,r} \Rightarrow d_{P,F} = d_{P,Q}$

$\left(\sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x + c)^2}\right)^2$

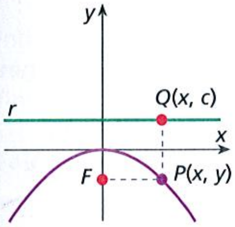
$(x - c)^2 + y^2 = (x + c)^2$

$\cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2}$

$y^2 = 4cx$

</td></tr>
<tr><td>

- $F(0, -c)$ e diretriz $y = c$, com $c > 0$

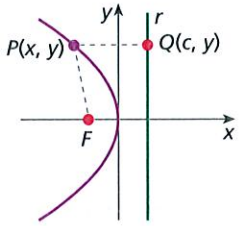


Analogamente ao visto acima, obtemos:

$x^2 = -4cy$

</td><td>

- $F(-c, 0)$ e diretriz $x = c$, com $c > 0$



Analogamente ao visto acima, obtemos:

$y^2 = -4cx$

</td></tr>
</table>

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observação

- No 1º caso:

$$d_{P,F} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2}$$

$$d_{P,Q} = \sqrt{(x - x)^2 + [y - (-c)]^2}$$

- No 2º caso:

$$d_{P,F} = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$$

$$d_{P,Q} = \sqrt{[x - (-c)]^2 + (y - y)^2}$$

Observação

Uma parábola com eixo de simetria sobre o eixo y tem equação do tipo $x^2 = 4cy$ ou $x^2 = -4cy$, com $c > 0$, é também o gráfico da função quadrática $y = \frac{1}{4c}x^2$ ou $y = -\frac{1}{4c}x^2$ (ou ainda: $y = ax^2$, com $a \neq 0$), conforme vimos no estudo de funções quadráticas.

Reflita

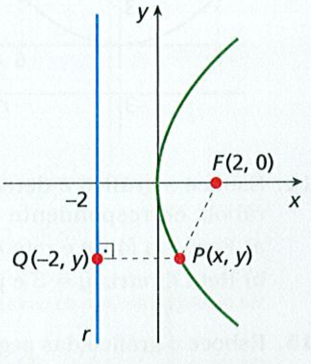
Em qualquer uma das possibilidades pode-se escrever a equação em função do parâmetro p? Como?

Sim, como $p = 2c$, com $p > 0$, então $c = \frac{p}{2}$ | Assim, para:

- $F(0, c)$ e diretriz $y = -c$, $x^2 = 2py$
- $F(0, -c)$ e diretriz $y = c$, $x^2 = -2py$
- $F(c, 0)$ e diretriz $x = -c$, $y^2 = 2px$
- $F(-c, 0)$ e diretriz $x = c$, $y^2 = -2px$

Exercícios resolvidos

R3. Determinar a equação da curva cujos pontos são equidistantes à reta $x = -2$ e ao foco $F(2, 0)$.



ADILSON SECCO

▸ ***Resolução***

O lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma reta e um ponto, não pertencente a essa reta, é uma parábola.

A equação dessa parábola pode ser determinada imaginando-se um ponto $P(x, y)$ pertencente à parábola. As distâncias desse ponto à reta dada e ao foco são iguais. Então, podemos escrever:

$$d_{P,F} = d_{P,r} \Rightarrow d_{P,F} = d_{P,Q}$$

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{[x - (-2)]^2 + (y - y)^2} \Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = \sqrt{(x + 2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow y^2 = 8x$$

A equação da parábola é $y^2 = 8x$.

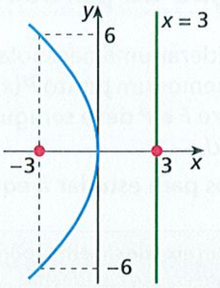
R4. Determinar a equação da parábola de foco $(-3, 0)$ e diretriz $x = 3$.

▶ ***Resolução***

Como a parábola tem o eixo de simetria sobre o eixo x, vértice na origem, $F(-3, 0)$ e diretriz $x = 3$, a equação da parábola será do tipo $y^2 = -4cx$. Neste caso, $c = 3$.

Então, a equação da parábola será:

$y^2 = -4 \cdot 3 \cdot x \Rightarrow y^2 = -12x$



ADILSON SECCO

R5. Dada a parábola $y^2 = 16x$, determinar as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz.

▶ ***Resolução***

Comparando a equação da parábola com os casos apresentados, essa parábola tem o eixo de simetria sobre o eixo x, vértice na origem, $F(c, 0)$ e diretriz $x = -c$. A equação desse tipo de parábola é $y^2 = 4cx$.

Comparando as equações $y^2 = 16x$ e $y^2 = 4cx$, temos: $c = 4$

Logo, as coordenadas do foco são $(4, 0)$ e a equação da reta diretriz é $x = -4$.

Reflita

No exercício **R4**, é possível determinar a equação da parábola sem conhecer a fórmula $y^2 = -4cx$? Como?

Ver resolução no Guia do professor.

R6. Determinar as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz da parábola que passa pelos pontos $(0, 0)$, $(2, -1)$ e $(4, -4)$ e tem o eixo de simetria sobre o eixo y e vértice na origem.

▶ ***Resolução***

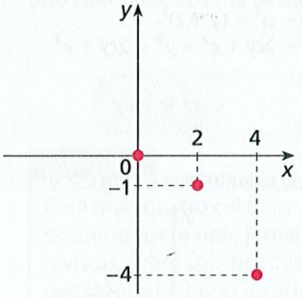
Analisando os pontos, percebemos que essa parábola tem concavidade voltada para baixo, portanto, a equação será do tipo $x^2 = -4cy$.

Escolhendo um ponto para substituir na equação, obtemos c:

$2^2 = -4 \cdot c \cdot (-1)$

$c = 1$

Portanto, $F(0, -1)$ e a reta diretriz é $y = 1$.



ADILSON SECCO

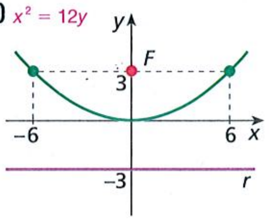
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

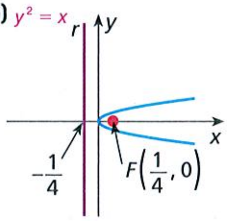
12. Determine o lugar geométrico dos pontos de um plano α equidistantes da reta $y = 6$ e do ponto $F(0, -6)$. $x^2 = -24y$

13. Determine a equação da parábola em cada caso.

a) $x^2 = 12y$



b) $y^2 = x$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

14. Esboce o gráfico e determine a equação da parábola correspondente a cada item.

a) Foco em $(4, 0)$ e reta diretriz $x = -4$.

b) Reta diretriz $y = 3$ e parâmetro $p = 6$.

Ver resolução no Guia do professor.

15. Esboce o gráfico das seguintes parábolas:

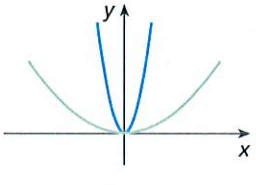
Ver resolução no Guia do professor.

a) $x^2 = -6y$ **b)** $y^2 = \frac{1}{2}x$

16. Determine a equação da parábola com eixo de simetria sobre o eixo x e vértice na origem que passa pelos pontos $A\left(-1, 2\sqrt{10}\right)$ e $B(-10, 20)$.

$y^2 = -40x$

17. Considere as parábolas de equações do tipo $x^2 = 4cy$, com $c > 0$.



ADILSON SECCO

Você pode resolver os itens com um colega.

a) Como a constante c determina a abertura da parábola?

- Atribua valores grandes para c e descubra como será a abertura da parábola.
- Atribua valores próximos a zero para c e descubra como será a abertura da parábola.

b) Variando c, verifique o que acontece com o parâmetro p da parábola.

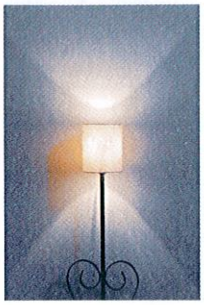
Ver resolução no Guia do professor.

4 A hipérbole

4.1 Traçado e definição da hipérbole

Para construir uma hipérbole, vamos marcar sobre o plano dois pontos, F_1 e F_2, distantes $2c$ um do outro (figura I). Em seguida, cortamos um barbante que tenha comprimento menor que o de uma régua, de modo que a diferença $2a$ entre o comprimento da régua e o comprimento do barbante seja menor que a distância entre os pontos F_1 e F_2, ou seja, $2a < 2c$.

Com a ajuda de um percevejo, prendemos uma das pontas do barbante no ponto F_2 e a outra em uma das extremidades da régua no ponto que chamaremos de Q (figura II). Fixamos a outra extremidade da régua em F_1 e, com um lápis apoiado contra a régua, traçamos uma curva, mantendo sempre o barbante esticado (figura II).


CARLOS LUVIZARI

A luz de um abajur de cúpula cilíndrica, próximo à parede, forma uma projeção sobre esta. A borda da parte iluminada tem a forma de uma hipérbole.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

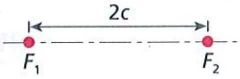


Figura I

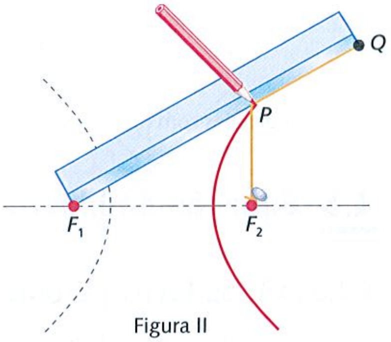


Figura II

Para qualquer ponto P pertencente à curva, temos $PF_1 - PF_2 = 2a$, que é uma constante. Veja:

$$PF_1 - PF_2 = PF_1 - PF_2 + PQ - PQ = \underbrace{(PF_1 + PQ)}_{\substack{\text{comprimento}\\ \text{da régua}}} - \underbrace{(PF_2 + PQ)}_{\substack{\text{comprimento}\\ \text{do barbante}}} = 2a$$

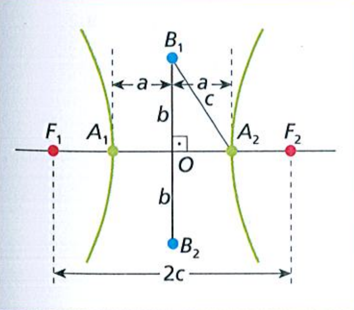
Repetindo o procedimento, mas desta vez prendendo o barbante no ponto F_1 e a extremidade da régua em F_2, obteremos outro ramo. A curva obtida é chamada hipérbole e pode ser assim definida:

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P de um plano cuja diferença, em módulo, de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 desse plano é constante e menor que a distância entre eles.

4.2 Elementos da hipérbole

A figura abaixo representa alguns elementos da hipérbole.

ADILSON SECCO

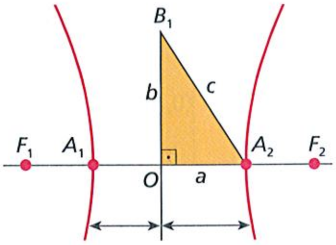


- **Focos:** são os pontos F_1 e F_2.
- **Distância focal:** é a distância entre os focos ($2c = F_1F_2$).
- **Vértices:** são os pontos A_1 e A_2, intersecções de $\overline{F_1F_2}$ com os dois ramos da hipérbole.
- **Centro:** é o ponto médio O de $\overline{A_1A_2}$.
- **Eixo real ou transverso:** é o segmento $\overline{A_1A_2}$ ($A_1A_2 = 2a$).
- **Eixo imaginário ou conjugado:** é o eixo $\overline{B_1B_2}$ ($B_1B_2 = 2b$).
- **Excentricidade (e):** é a razão $e = \frac{c}{a}$, sendo $e > 1$.

4.3 Relação entre a, b e c

Observe a hipérbole:

Para o triângulo retângulo OB_1A_2, podemos escrever a relação $c^2 = a^2 + b^2$.



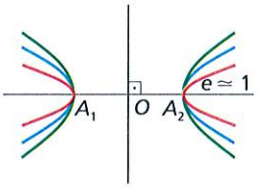
ADILSON SECCO

4.4 Excentricidade

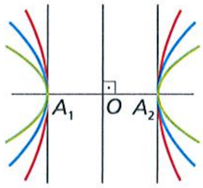
Ao observar várias hipérboles, você perceberá que algumas têm ramos mais abertos que outras. Essa característica da hipérbole é determinada por um número, a excentricidade e.

Como $e = \frac{c}{a}$ e $c > a$, a excentricidade e é maior que 1.

- Se e for um número próximo de 1, os ramos da hipérbole serão mais fechados.
- Se e for um número tendendo ao infinito, os ramos da hipérbole serão mais abertos.



Hipérboles com ramos mais fechados



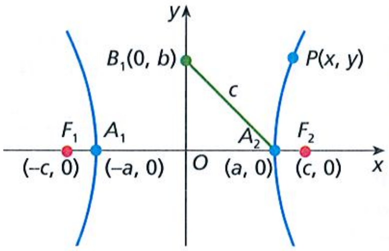
Hipérboles com ramos mais abertos

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4.5 Equação da hipérbole com centro na origem

Caso 1: os focos pertencem ao eixo das abscissas

Considere uma hipérbole, com centro O na origem do sistema cartesiano, vértices em $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$, com $a > 0$, e focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, com $c > 0$. Escolhemos um ponto P qualquer sobre essa hipérbole, com coordenadas (x, y).



ADILSON SECCO

Observação

Propriedade dos módulos:
Sendo a um número real positivo, tem-se que:
$|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$

Sabemos que $|PF_1 - PF_2| = 2a$.

Assim:

$$\left|\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

$$(cx - a^2)^2 = \left(\pm a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 - \cancel{2cxa^2} + a^4 = a^2x^2 - \cancel{2cxa^2} + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}} - \frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2} = \frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Observação

- Pela relação entre a, b e c na figura acima:
  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 - a^2 = b^2$
- Como $a \neq 0$ e $b \neq 0$, $ab \neq 0$, então $a^2b^2 \neq 0$. Logo, podemos dividir a equação por a^2b^2.

Logo, a equação reduzida da hipérbole de focos no eixo das abscissas e centro (0, 0) é:

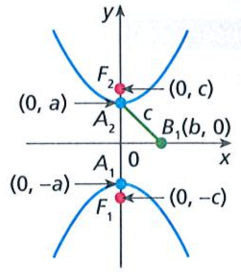
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Caso 2: os focos pertencem ao eixo das ordenadas

Nesse caso, os focos têm coordenadas $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$, com $c > 0$. Fazendo cálculos análogos aos do caso anterior, obtemos:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Essa é a equação reduzida da hipérbole de focos no eixo das ordenadas e centro (0, 0).



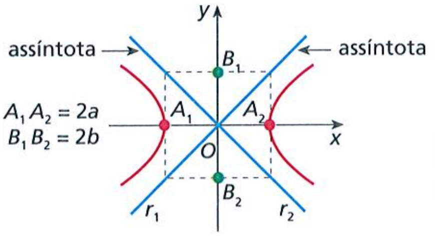
ADILSON SECCO

4.6 Assíntotas da hipérbole

Observe o retângulo de lados $2a$ e $2b$ na hipérbole abaixo:

As retas r_1 e r_2 que contêm as diagonais desse retângulo são chamadas de **assíntotas** da hipérbole. A hipérbole se aproxima cada vez mais das assíntotas, sem tocá-las.

As equações das retas assíntotas são dadas por r_1: $bx - ay = 0$ e r_2: $bx + ay = 0$



ADILSON SECCO

Reflita

Se o retângulo que determina as assíntotas de uma hipérbole for um quadrado, como será essa hipérbole?

Ela terá $a = b$, ou seja, os comprimentos dos eixos imaginário e real têm a mesma medida.

Observação

Dados dois pontos (0, 0) e (a, b) para determinar a equação da reta que passa por esses dois pontos, pode-se calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow bx - ay = 0$$

Exercícios resolvidos

R7. Determinar a equação reduzida da hipérbole com centro na origem, focos sobre os eixos das ordenadas $F_1(0, -7)$ e $F_2(0, 7)$ e eixo real medindo 10.

▸ ***Resolução***

Sabendo que o eixo real mede 10, temos $a = 5$. A distância de um dos focos ao centro da hipérbole fornece o valor $c = 7$. Assim, pela relação entre a, b e c, temos:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 7^2 = 5^2 + b^2 \Rightarrow 49 - 25 = b^2 \Rightarrow b^2 = 24$

Como os focos estão sobre o eixo das ordenadas, temos:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$$

R8. Determinar a excentricidade de uma hipérbole centrada na origem, sabendo que seus focos são (−4, 0) e (4, 0) e que ela passa pelo ponto $\left(3, \sqrt{15}\right)$.

▸ ***Resolução***

Os focos dessa hipérbole estão sobre o eixo x, então:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como a hipérbole passa pelo ponto $\left(3, \sqrt{15}\right)$, vamos substituí-lo na equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{3^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{15})^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{a^2} - \frac{15}{b^2} = 1$$

- Pela relação $c^2 = a^2 + b^2$, temos $16 - b^2 = a^2$. Assim:

$$\frac{9}{16 - b^2} - \frac{15}{b^2} = 1 \Rightarrow 9b^2 - 15(16 - b^2) = b^2 \cdot (16 - b^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9b^2 - 240 + 15b^2 = 16b^2 - b^4 \Rightarrow b^4 + 8b^2 - 240 = 0 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

Determinando o valor de a:

$16 - b^2 = a^2 \Rightarrow 16 - (2\sqrt{3})^2 = a^2 \Rightarrow a = \pm 2$

Como $a > 0$, então $a = 2$.

Assim, a excentricidade dessa hipérbole vale:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{4}{2} \Rightarrow e = 2$$

Observação

- Elipse
  Se $a = 5$ e $b = 3$, temos:
  $c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c = 4$
- Hipérbole
  Se $a = 4$ e $b = 3$, temos:
  $c^2 = 16 + 9 \Rightarrow c = 5$

R9. Esboçar os gráficos da elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ e da hipérbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ em um mesmo plano, destacando os pontos notáveis coincidentes.

▸ ***Resolução***

Da equação da elipse, temos:

$a = 5$, $b = 3$ e $c = 4$

$$\begin{cases} A_1(-5,\ 0) \text{ e } A_2(5,\ 0) \\ F_1(-4,\ 0) \text{ e } F_2(4,\ 0) \end{cases}$$

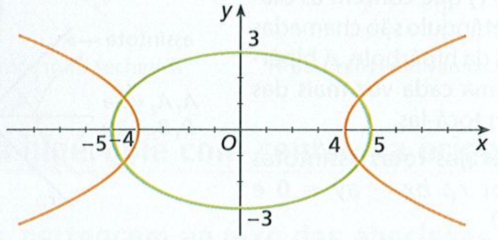
Da equação da hipérbole, temos:

$a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$

$$\begin{cases} A_1(-4,\ 0) \text{ e } A_2(4,\ 0) \\ F_1(-5,\ 0) \text{ e } F_2(5,\ 0) \end{cases}$$

As extremidades do eixo real da hipérbole coincidem com os focos da elipse.

Os focos da hipérbole coincidem com as extremidades do eixo maior da elipse.



ADILSON SECCO

20. a) $F_1(-4,\ 0)$; $F_2(4,\ 0)$
$A_1(-2\sqrt{3},\ 0)$; $A_2(2\sqrt{3},\ 0)$
$e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $F_1(0,\ -6)$; $F_2(0,\ 6)$
$A_1(0,\ -5)$; $A_2(0,\ 5)$
$e = \frac{6}{5}$

c) $F_1(-3\sqrt{10},\ 0)$; $F_2(3\sqrt{10},\ 0)$
$A_1(-3,\ 0)$; $A_2(3,\ 0)$
$e = \sqrt{10}$

d) $F_1(0,\ -5)$; $F_2(0,\ 5)$
$A_1(0,\ -4)$; $A_2(0,\ 4)$
$e = \frac{5}{4}$

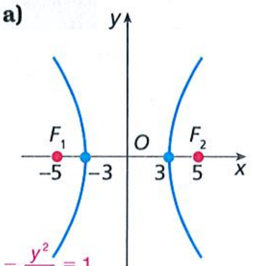
23. b) $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{5}}{5}y = 0$
$\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y = 0$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

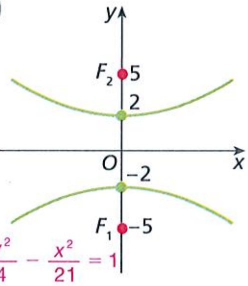
18. Obtenha a equação reduzida de cada hipérbole.

a)



$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

b)



$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{21} = 1$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

19. Determine a equação de cada hipérbole, dados:

a) os focos $F_1(-2\sqrt{41},\ 0)$ e $F_2(2\sqrt{41},\ 0)$ e comprimento do eixo real igual a 20; $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$

b) o comprimento do eixo imaginário igual a 12 e excentricidade igual a $\frac{\sqrt{85}}{7}$. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{36} = 1$ ou $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{36} = 1$

20. Determine os focos, os vértices e a excentricidade das hipérboles:

a) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{11} = 1$

c) $9x^2 - y^2 = 81$

d) $9y^2 - 16x^2 = 144$

21. Esboce os gráficos das hipérboles de equação:

a) $x^2 - y^2 = 1$

b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1$

c) $16x^2 - 9y^2 = 144$

d) $25y^2 - 4x^2 = 100$

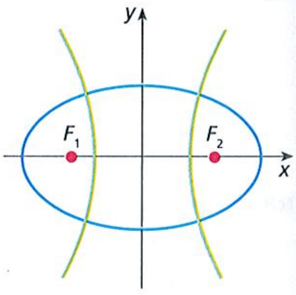
Ver resolução no Guia do professor.

22. A figura abaixo representa uma hipérbole e uma elipse com focos coincidentes. A elipse tem eixo maior de comprimento 5 e excentricidade $\frac{4}{5}$.

A hipérbole é **equilátera**, isto é, os comprimentos dos eixos real e imaginário são iguais. Determine a equação de ambas.

elipse: $\frac{4x^2}{25} + \frac{4y^2}{9} = 1$

hipérbole: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$



ADILSON SECCO

23. Determine as assíntotas das hipérboles abaixo:

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$
$2x - 3y = 0$; $2x + 3y = 0$

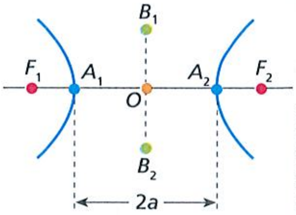
b) $5y^2 - 2x^2 = 1$

24. Esboçar, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos da elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ e da hipérbole $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{13} = 1$. Ver resolução no Guia do professor.

25. Dada a hipérbole da figura, demonstre a propriedade da hipérbole:

- $A_1F_1 = A_2F_2$

Ver resolução no Guia do professor.



ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. Determine a equação da elipse em que os focos são $F_1(0, 3)$ e $F_2(0, -3)$ e a soma das distâncias PF_1 e PF_2 é igual a 10, sendo P um ponto da elipse. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

2. Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Calcule a área dos triângulos:

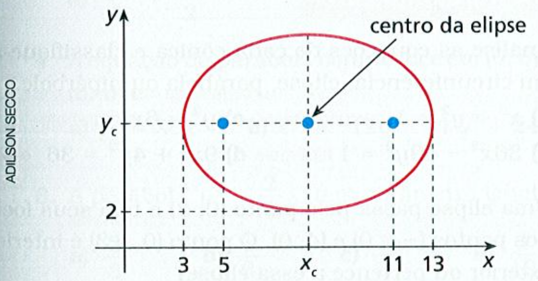
a) $A_1B_1A_2$ 6 unidades de área **b)** A_1OB_2 3 unidades de área **c)** $F_1F_2B_1$ $2\sqrt{5}$ unidades de área

3. Construa numa folha de papel milimetrado uma elipse de centro (0, 0) em que um dos focos é o ponto (4, 0) e em que o ponto $\left(3, \frac{12}{5}\right)$ pertence à elipse. Escreva um texto explicando o procedimento.
Ver resolução no Guia do professor.

4. Uma agência espacial avaliou o movimento de determinado planeta e observou que ele se movimenta a partir de dois focos diferentes e que a soma das distâncias a esses focos era sempre constante e maior que a distância entre eles. Que tipo de trajetória faz esse planeta? Esboce uma figura que ilustre esse movimento. elíptica
Ver figura no Guia do professor.

Exercício resolvido

R10. Obter a equação reduzida da elipse:



ADILSON SECCO

▸ ***Resolução***

Da figura, temos:

$2a = 13 - 3 \Rightarrow a = 5$

Além disso:

$x_c = \frac{3 + 13}{2} = 8$

Logo, a distância c entre o centro e um dos focos é dada por: $c = 11 - 8 = 3$

Assim: $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 + 9 = 25 \Rightarrow b = 4$

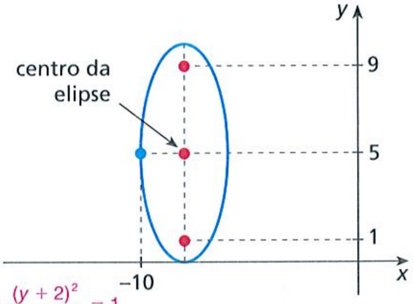
Portanto: $y_c = 2 + 4 = 6$

A equação da elipse de centro (x_c, y_c) e eixo maior paralelo ao eixo dos x é:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1, \text{ com } a > b > 0$$

$$\frac{(x - 8)^2}{25} + \frac{(y - 6)^2}{16} = 1$$

5. Sabendo que a equação da elipse de centro (x_c, y_c) e eixo maior paralelo ao eixo dos y é dada por $\frac{(y - y_c)^2}{a^2} + \frac{(x - x_c)^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, escreva a equação reduzida da elipse representada no plano cartesiano abaixo. $\frac{(x + 7)^2}{9} + \frac{(y - 5)^2}{25} = 1$



ADILSON SECCO

6. $\frac{(x + 6)^2}{144} + \frac{(y + 2)^2}{225} = 1$

6. Os pontos $A(-6, -17)$, $F(-6, 7)$ e $C(-6, -2)$ são, respectivamente, um vértice, um foco e o centro de uma elipse. Determine sua equação reduzida.

7. Construa o gráfico da cônica cuja equação é $169x^2 + 25y^2 = 4.225$ e determine seus focos.
$F_1(0, -12)$ e $F_2(0, 12)$

8. (ITA-SP) A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos (1, 0) e (0, −2) são, respectivamente: alternativa e

a) $\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$

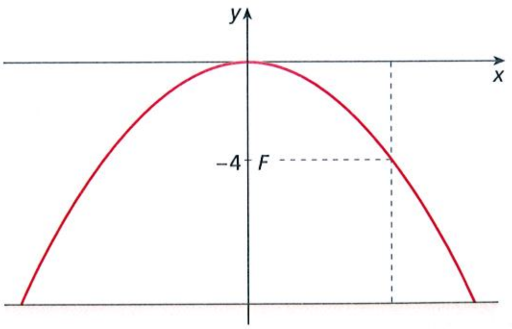
b) $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $2\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. A trajetória do pulo de um grilo obedece à parábola do gráfico a seguir. Determine a equação dessa parábola. $x^2 = -16y$



ADILSON SECCO

10. Determine as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola $y^2 = -16x$. $F(-4, 0)$ e $x = 4$

11. Esboce o gráfico da parábola $y^2 = -8x$.
Ver resolução no Guia do professor.

12. Determine a equação da parábola que tem foco $F(3, 0)$ e como diretriz a reta $x + 3 = 0$. $y^2 = 12x$

13. Determine o parâmetro da parábola de equação $y^2 = -12x$. 6

Exercício resolvido

R11. Obter os pontos de intersecção da parábola $y^2 = 4x$ com a reta $y = -3x + 1$.

▸ ***Resolução***

Os pontos de intersecção pertencem simultaneamente à parábola e à reta. Então:

$y^2 = 4x$ (I)

$y = -3x + 1$ (II)

Substituindo (II) em (I):

$(-3x + 1)^2 = 4x$

$9x^2 - 6x + 1 = 4x$

$9x^2 - 10x + 1 = 0$

Então, $x = 1$ ou $x = \frac{1}{9}$.

Substituindo os valores de x em (II):

Para $x = 1$: $y = -3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow y = -2$

Para $x = \frac{1}{9}$: $y = -3 \cdot \frac{1}{9} + 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

A reta y intercepta a parábola em dois pontos:

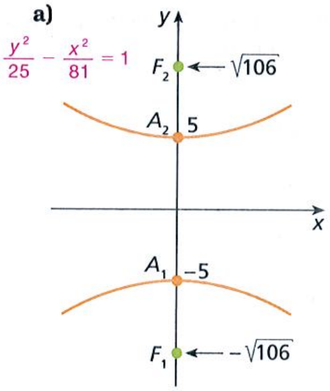
$(1, -2)$ e $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{3}\right)$.

14. Determine os pontos de intersecção entre a parábola $y^2 = 6x$ e a reta $y = 2x$. $(0, 0)$ e $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

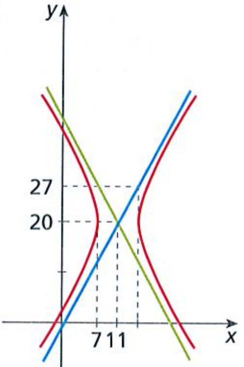
15. Determine a equação reduzida da hipérbole cujo gráfico está representado a seguir.

a)

$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{81} = 1$



b)



$\frac{(x - 11)^2}{16} - \frac{(y - 20)^2}{49} = 1$

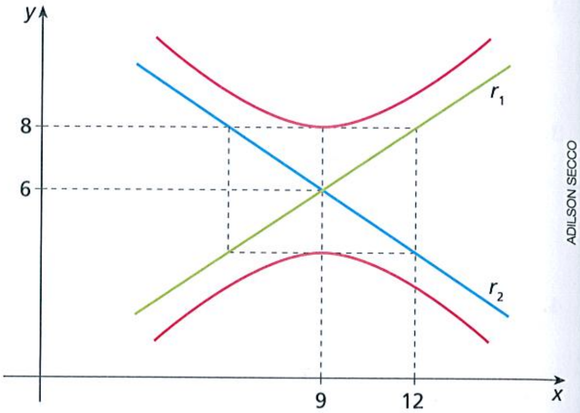
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

16. O mapa de uma cidade é localizado sobre um sistema cartesiano, em que o centro da cidade está na origem. Se um avião voa sobre essa cidade obedecendo à equação $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{81} = 1$, qual a distância mínima em relação ao centro da cidade a que esse avião chega? (As unidades adotadas têm medidas lineares em quilômetro.) 5 km

17. Calcule a excentricidade da hipérbole: $49x^2 - 36y^2 = 7.056$ $e = \frac{\sqrt{85}}{6}$

18. Construa os gráficos de $x^2 - y^2 = 1$ e $y^2 - x^2 = 1$ num mesmo plano cartesiano.
Ver resolução no Guia do professor.

19. Dada a hipérbole abaixo, determine a equação de suas assíntotas, r_1 e r_2. r_1: $2x - 3y = 0$
r_2: $2x + 3y - 36 = 0$



ADILSON SECCO

20. A cônica de equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4 + m} = 1$ deve ser representada num plano cartesiano. Se sua representação gráfica é a de uma hipérbole equilátera, qual o valor de m? −13

Aprofundamento

21. Analise as equações de cada cônica e classifique-as em circunferência, elipse, parábola ou hipérbole.

a) $x^2 + y^2 = 1$ circunferência **c)** $y^2 = 6x$ parábola

b) $36x^2 - 49y^2 = 1$ hipérbole **d)** $9x^2 + 4y^2 = 36$ elipse

22. Uma elipse passa pelo ponto (0, 3) e tem seus focos nos pontos (−4, 0) e (4, 0). O ponto (0, −3) é interior, exterior ou pertence a essa elipse?
O ponto (0, −3) pertence à elipse.

23. Indique a posição relativa entre a circunferência $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ e a elipse $\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{1} = 1$. tangentes exteriores

24. Determine b de modo que a parábola $y = x^2 + bx$ tenha um único ponto em comum com a reta $y = x - 1$.
3 ou −1

Desafios

25. Se $a > b > 0$, em quantos pontos as curvas $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ se cortam? 4

26. Determine o número de pares (x, y), com $x, y \in \mathbb{Z}$, que satisfazem o sistema: $\begin{cases} y < 0 \\ y \geq x^2 - 4 \end{cases}$ 10 pares

Autoavaliação

Leia atentamente as questões a seguir e resolva-as em seu caderno.

1. As órbitas dos planetas ao redor do Sol têm a forma de uma ______ e a ______ determina se o seu formato é mais ou menos achatado. alternativa b

a) circunferência; raio
b) elipse; excentricidade
c) parábola; curvatura
d) hipérbole; excentricidade

2. A equação da elipse com $F_1(0, -5)$ e $F_2(0, 5)$ e $a = 8$ é: alternativa d

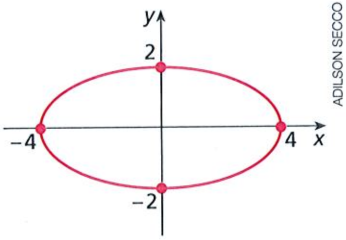
a) $\frac{x^2}{39} - \frac{y^2}{81} = 1$
b) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$
c) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{39} = 1$
d) $\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{64} = 1$

3. A excentricidade da elipse $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ é igual a: alternativa c

a) $\frac{3}{4}$
b) $\frac{4}{3}$
c) $\frac{6}{10}$
d) $\frac{10}{6}$

4. A equação reduzida da elipse abaixo é: alternativa b

a) $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1$
b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
c) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$
d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$



ADILSON SECCO

5. A equação da parábola com vértice em (0, 0) e foco (6, 0) é: alternativa c

a) $y^2 = 36x$
b) $x^2 = -12y$
c) $y^2 = 24x$

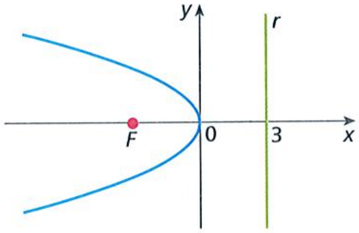
6. A parábola $y^2 = \frac{2}{3}x$ tem parâmetro igual a: alternativa c

a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{12}$

7. ______ é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância a uma dada reta é igual à distância a um ponto fixo. alternativa c

a) Elipse
b) Hipérbole
c) Parábola
d) Circunferência

8. Sabendo que r é a reta diretriz e F é o foco, a equação da parábola abaixo é: alternativa d



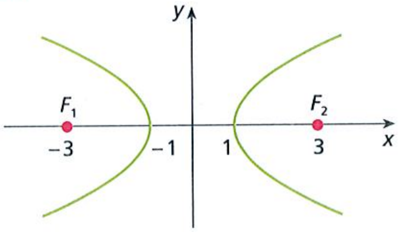
ADILSON SECCO

a) $y^2 = -9x$
b) $y^2 = 12x$
c) $x^2 = -12y$
d) $y^2 = -12x$

9. A equação $9x^2 - 4y^2 = 36$ representa uma: alternativa b

a) elipse
b) hipérbole
c) parábola
d) circunferência

10. A equação reduzida da hipérbole abaixo é: alternativa a



ADILSON SECCO

a) $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$
b) $\frac{x^2}{3} - y = 1$
c) $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$
d) $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Identificar as cônicas em situações reais.	X									
Diferenciar as elipses, as parábolas e as hipérboles.		X					X			
Associar as cônicas com suas respectivas equações.		X	X		X	X			X	
Associar os gráficos de cônicas com suas equações, bem como as equações com os gráficos de cônicas.				X				X		X
Páginas do livro referentes ao conceito	142 a 145	144 a 147	145 a 147	144 a 147	148 a 150	148 a 150	148 a 150	148 a 150	151 a 154	151 a 154

Cônicas

Problema

(UFC-CE) A elipse F do plano cartesiano xy, obtida da elipse E: $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 25 = 0$ por uma única translação que leva os focos de E em pontos equidistantes da origem e sobre o eixo Ox, admite uma equação igual a:

a) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 18$

b) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 6$

c) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 16$

d) $x^2 + 2y^2 = 25$

e) $2x^2 + 3y^2 = 49$

Solução

Nesse problema temos de encontrar a equação da elipse F, obtida por meio da translação da elipse E. Para encontrar essa equação, precisamos conhecer quais são as coordenadas dos focos e das extremidades do eixo maior e do eixo menor. A forma como a equação da elipse E está escrita não explicita, de imediato, esses dados; portanto, temos de reescrevê-la na forma reduzida.

Vamos resolver esse problema de duas formas: uma utilizando a Álgebra e outra, mais prática, desenhando a elipse.

Utilizando a Álgebra

Para escrever a equação $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 25 = 0$ na forma reduzida, usamos a técnica de completar quadrados para encontrar uma expressão fatorável.

1º) Vamos agrupar os termos em x, depois os termos em y e, por fim, passamos o termo independente para o 2º membro da igualdade.

$$x^2 - 6x + 2y^2 + 4y = 25$$

2º) Note que os termos em y podem ser fatorados:

$$x^2 - 6x + 2(y^2 + 2y) = 25$$

3º) Para completar quadrados nos termos em x e em y, obtendo uma equação equivalente, adicionamos 9 e 2, nos dois lados da igualdade.

$$x^2 - 6x + 9 + 2(y^2 + 2y + 1) = 25 + 9 + 2$$

$$2 \cdot 1 = 2$$

4º) Agrupando os trinômios quadrados perfeitos, temos:

$$(x - 3)^2 + 2(y + 1)^2 = 36$$

5º) Dividindo todos os termos por 36:

$$\frac{(x - 3)^2}{36} + \frac{(y + 1)^2}{18} = 1$$

O centro da elipse E não está na origem (0, 0). Para saber onde ela se localiza, vamos comparar a equação encontrada com a equação reduzida de uma elipse de centro no ponto (0, 0) e eixo maior sobre o eixo das abscissas: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$

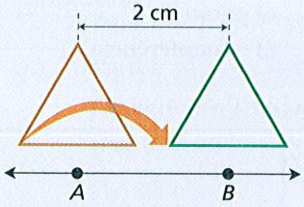
O centro da elipse E é $(3, -1)$, com $a = 6$ e $b = 3\sqrt{2}$.

Como em qualquer translação não há deformação, a equação da elipse F é:

$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1$, ou, multiplicando todos os termos por 18, $\frac{x^2}{2} + y^2 = 18$.

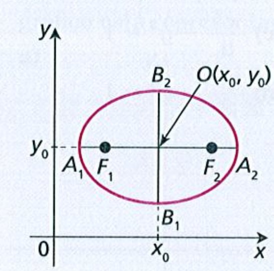
Resposta: alternativa a

A translação é um dos movimentos possíveis da transformação geométrica (os outros movimentos são: *rotação* e *reflexão*). Assim como nas outras transformações geométricas, na translação de uma figura não se altera o tamanho nem a forma. Para realizar uma translação é necessário saber: a direção de deslocamento, o sentido e a medida do deslocamento. No exemplo, a direção é a reta $\overleftrightarrow{AB}$, o sentido é de A para B e a medida do deslocamento é 2 cm.



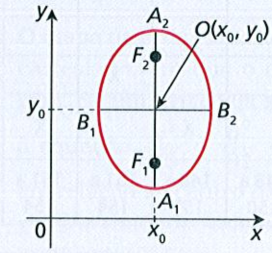
A equação da elipse com centro qualquer e eixo maior paralelo ao eixo x é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$$



A equação da elipse com centro qualquer e eixo maior paralelo ao eixo y é:

$$\frac{(y - y)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Resolvendo por meio do desenho

Podemos ainda resolver esse problema usando papel milimetrado, papel vegetal, dois percevejos, linha e uma placa para apoiar a construção da figura.

Utilizem a escala que for mais conveniente.

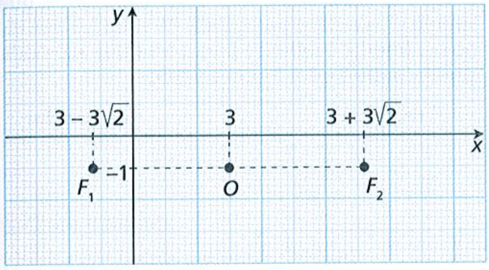
A placa de apoio pode ser de isopor ou de madeira.

Da equação reduzida da elipse E: $\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{18} = 1$, identificamos as coordenadas do centro $(3, -1)$, além de $a = 6$ e $b = 3\sqrt{2}$.

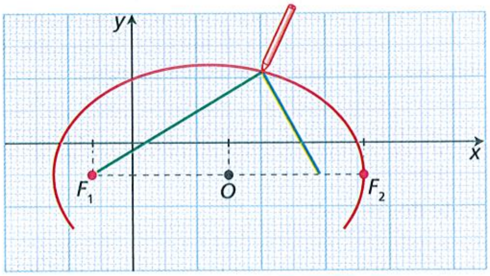
Pela relação $a^2 = b^2 + c^2$, podemos calcular o valor de c:

$c^2 = 36 - 18 \Rightarrow c^2 = 18 \Rightarrow c = 3\sqrt{2}$

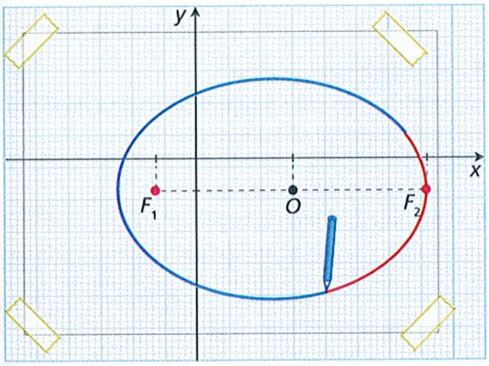
1) Na folha de papel milimetrado, traçamos os eixos x e y e localizamos o centro da elipse $(3, -1)$ e os focos $F_1 = \left(3 - 3\sqrt{2}, -1\right)$ e $F_2 = \left(3 + 3\sqrt{2}, -1\right)$.



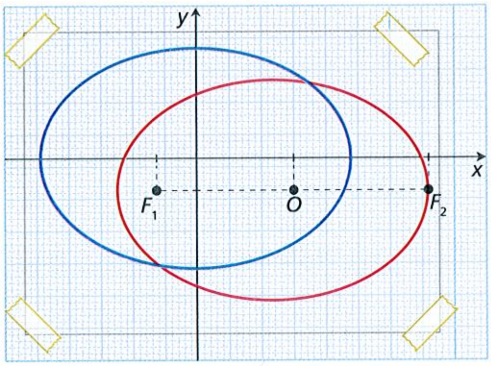
2) Fixamos um percevejo em cada foco da elipse e prendemos a linha nos percevejos, deixando um comprimento de 12 cm ($2a = 12$). Apoiamos um lápis na linha esticada e traçamos a curva.



3) Retiramos a linha e os percevejos e, com uma folha de papel vegetal, decalcamos a curva.



4) Deslocando o papel vegetal, de forma que coincida o centro da elipse com a origem do plano cartesiano, efetuamos a sua translação e constatamos, nos eixos, os valores a e b.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Comparem as resoluções

Escolham uma das resoluções e escrevam no caderno um comentário sobre ela. Se vocês pensaram em uma forma diferente de resolver esse problema, elaborem a resolução e façam um comentário a respeito. resposta pessoal

Variações do problema

1. É dada a seguinte equação de elipse: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
Escrevam a equação de uma elipse cujo eixo maior sofreu uma rotação de 90° com centro em (0, 0) e seu centro foi transladado para o ponto (4, −3). $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

2. Dada a equação: $x^2 + 8y^2 + 2x - 16y + 5 = 0$, escrevam a equação da elipse transladada com centro na origem do sistema de coordenadas. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$

Compreensão de texto

Este infográfico permite o desenvolvimento interdisciplinar com Física.

O fogão solar

Apesar de descobertas pelos gregos no século IV a.C., as seções cônicas só tiveram aplicação dois mil anos depois nos estudos astronômicos de Galileu e Kepler. Hoje, uma das propriedades das cônicas pode ser empregada para cozinhar alimentos, com o uso de energia solar.

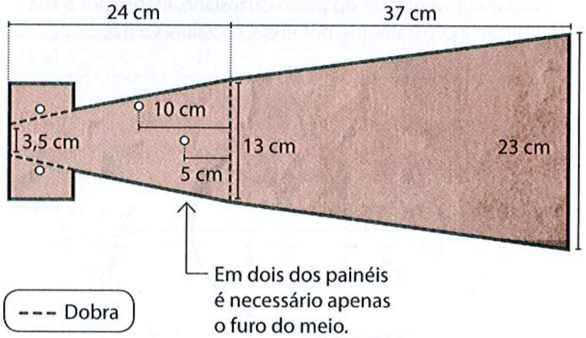
Nada além de luz

Em um único dia, a luz solar que chega à superfície da Terra equivale a 21 vezes a energia que o mundo consome em um ano. Veja como é a estrutura de um fogão solar capaz de aproveitar essa fonte limpa e gratuita de energia.

Se algum aluno mostrar interesse em construir o fogão solar, deve-se alertá-lo sobre os cuidados a ser tomados: realizar a experiência em local aberto e arejado e tomar cuidado com a temperatura da panela, evitando queimaduras.

❶ Recorte dos painéis

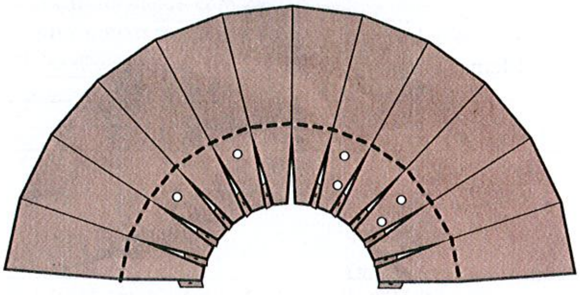
A estrutura pode ser composta de 12 painéis de papelão com as medidas indicadas abaixo. Quatro desses painéis são perfurados, como mostra o modelo.



Em dois dos painéis é necessário apenas o furo do meio.

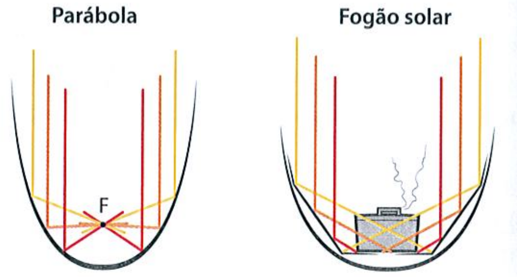
❷ Montagem dos painéis

Veja na figura a seguir a ordem correta da montagem dos painéis. Todos são colados, com fita adesiva, pelo lado maior.



Por que esquenta?

O segredo desse fogão solar está na sua forma, que lembra uma antena parabólica. Parte da luz que incide no seu interior é refletida para a área que acomoda a panela, onde o calor é concentrado.

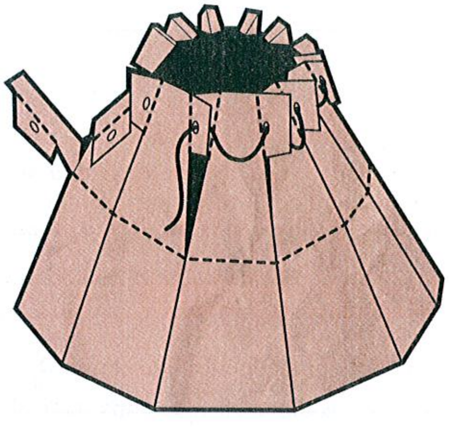


❸ Revestimento metálico

Para refletir a luz do Sol, a superfície interna do fogão precisa ser revestida com papel alumínio.

❹ Estrutura e fundo do fogão

Para finalizar, usa-se um cordão para amarrar todos os painéis, passando-o pelos furos na parte inferior. Para tampar o fundo do fogão usa-se cartolina revestida com papel-alumínio.



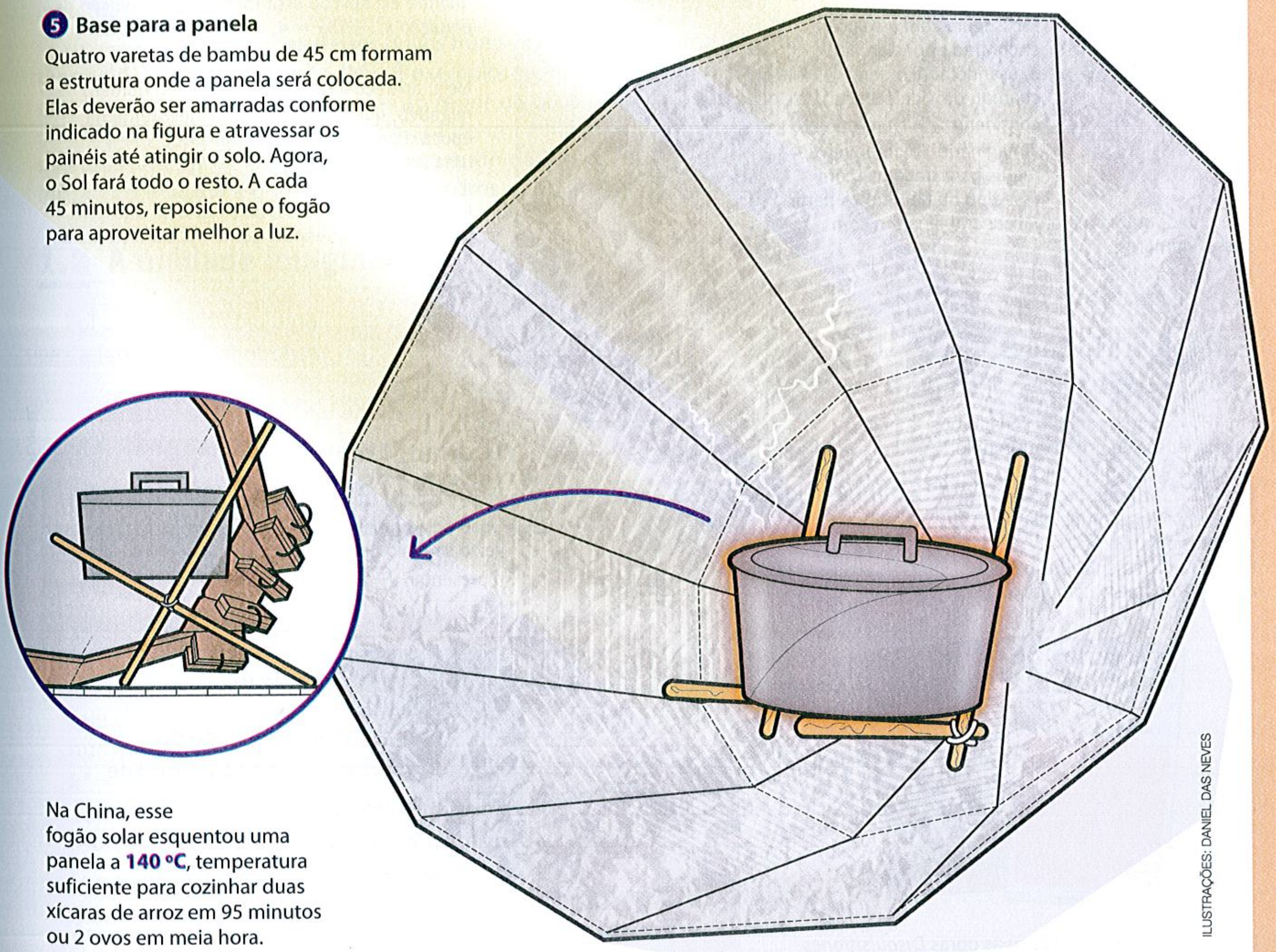
Fontes: Solar Cooking International. Disponível em: <www.solarcooking.org/>; World Energy Council. Disponível em: <www.worldenergy.org>. Acessos em: 3 abr. 2012.

1. O segredo do fogão solar está na sua forma, que lembra uma antena parabólica, e o fato de sua superfície interna ser revestida com papel-alumínio também contribui para sua eficiência. Parte da luz solar que incide no interior do fogão é refletida para a área que acomoda a panela, onde o calor é concentrado.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno

1. Como esse fogão solar consegue aquecer uma panela?
2. Pesquise outro tipo de fogão solar, colete informações sobre sua estrutura, forma, funcionamento, imagens etc. Monte uma apresentação sobre esse fogão solar e apresente para seus colegas. Ver resolução no Guia do professor.
3. A cada 45 minutos é preciso reposicionar o fogão solar. Por que isso é necessário? Explique. resposta pessoal
4. O infográfico cita uma fonte de energia limpa e gratuita. Que fonte é essa? Pesquise sobre essa e outras fontes de energia, suas vantagens e desvantagens. Monte uma cartilha comparando-as. resposta pessoal



⑤ Base para a panela

Quatro varetas de bambu de 45 cm formam a estrutura onde a panela será colocada. Elas deverão ser amarradas conforme indicado na figura e atravessar os painéis até atingir o solo. Agora, o Sol fará todo o resto. A cada 45 minutos, reposicione o fogão para aproveitar melhor a luz.

Na China, esse fogão solar esquentou uma panela a **140 °C**, temperatura suficiente para cozinhar duas xícaras de arroz em 95 minutos ou 2 ovos em meia hora.

ILUSTRAÇÕES: DANIEL DAS NEVES

Capítulo 7

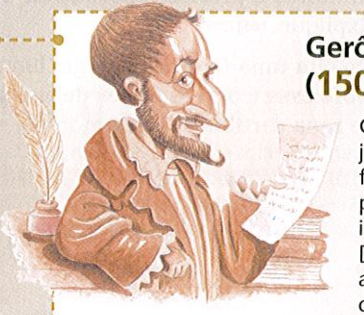
Números complexos

1500
1550
1600
1650
1700
1750
1800
1850

Niccolo Tartaglia (cerca de 1500-1557)

Descobriu uma fórmula geral para resolver equações do tipo $x^3 + px = q$, com $p, q \in \mathbb{R}$. Porém, não publicou sua obra.

Gerônimo Cardano (1501-1576)



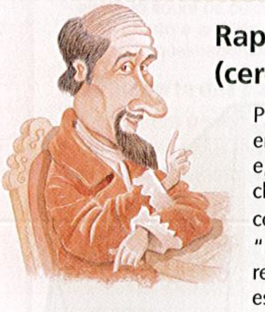
Quebrando um solene juramento de silêncio feito a Tartaglia, publicou a obra intitulada *Ars Magna* [Arte maior], na qual apresentou a fórmula descoberta por Tartaglia. A primeira dificuldade de Cardano surgiu quando ele aplicou essa fórmula na resolução da equação $x^3 - 15x = 4$, chegando à solução:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Nela, aparece a raiz quadrada de um número negativo, que era considerado inexistente na época. Porém, Cardano já sabia que $x = 4$ era uma solução da equação $x^3 - 15x = 4$, pois: $4^3 - 15 \cdot 4 = 4 \Rightarrow 64 - 60 = 4$

Isso gerou um impasse, pois Cardano não conseguiu compreender como aplicar a fórmula nesse caso.

Raphael Bombelli (cerca de 1526-1573)

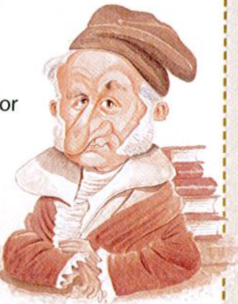


Prosseguiu com a solução encontrada por Cardano e, usando aquilo que chamou de "ideia louca", considerou $\sqrt{-1}$ um número "imaginário" e desenvolveu regras para trabalhar com esse tipo de número. A partir de então, outros matemáticos trabalharam com esses números.

Leonard Euler (1707-1783)

Usou pela primeira vez o símbolo i para representar $\sqrt{-1}$.

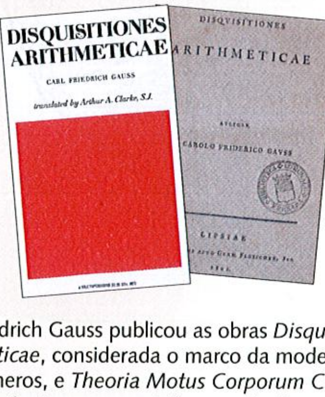
Carl Friedrich Gauss (1777-1855)



Em 1801, usou o símbolo i criado por Euler e, após seu uso, esse símbolo se tornou amplamente aceito.

Em 1831, fez um estudo sobre representação geométrica dos números complexos.

Em 1832, Gauss introduziu a expressão *número complexo*.


DISQUISITIONES ARITHMETICAE
CARL FRIEDRICH GAUSS
translated by Arthur A. Clarke, S.J.
DISQUISITIONES ARITHMETICAE
CAROLO FRIDERICO GAUSS
LIPSIAE

FOTOS: ACERVO DA BIBLIOTECA COMUNALE FERRARA, ITÁLIA

Carl Friedrich Gauss publicou as obras *Disquisitiones Arithmeticae*, considerada o marco da moderna Teoria dos Números, e *Theoria Motus Corporum Coelestium*, uma referência para os astrônomos da época.

ILUSTRAÇÕES: ORLANDELI

Objetivos do capítulo

- Compreender o conjunto dos números complexos do ponto de vista histórico.
- Ampliar o conhecimento adquirido sobre os conjuntos numéricos.
- Operar algébrica e geometricamente com números complexos.
- Aplicar os números complexos em diversas áreas do conhecimento.

1 Os números complexos

1.1 Histórico

A resolução de equações sempre representou um dos principais interesses dos matemáticos, desde a Antiguidade até os dias de hoje. Babilônios, gregos, egípcios e hindus já conheciam alguns casos particulares de equações de 2º grau, mas, em vez de fórmulas, usavam régua e compasso para resolvê-las. Para esses matemáticos, não havia dificuldade quando aparecia a raiz quadrada de um número negativo: como as equações eram formuladas para solucionar um problema concreto, se surgisse uma raiz quadrada negativa, o problema era considerado sem solução.

Esse ponto de vista só começou a mudar a partir do século XVI, com os matemáticos italianos e seus estudos sobre a resolução de equações de 3º grau em que aparecem raízes de números negativos. No início, a existência de um "novo tipo de número" foi de difícil aceitação, mas a ampliação dos estudos por outros matemátivos e a descoberta da possibilidade de aplicação desses números em outras áreas tornaram os números complexos uma das mais importantes descobertas matemáticas.

Hoje em dia, aplicações desses novos números adquiriram uma enorme importância no campo da Engenharia (por exemplo, na modelagem de circuitos elétricos, no movimento de líquidos e gases ao redor de obstáculos), na Aerodinâmica (no cálculo da força de sustentação da asa de um avião), na Geometria fractal e em sistemas dinâmicos (por exemplo, no estudo da interferência em linhas de transmissão de energia e telefonia), entre outros.

1.2 A unidade imaginária

Foi o matemático alemão Leonard Euler quem, em 1777, utilizou pela primeira vez a letra **i** para simbolizar $\sqrt{-1}$.

O número **i**, tal que $i^2 = -1$, é chamado de **unidade imaginária**.

Com o surgimento desse novo tipo de número, podemos resolver equações que não têm solução no conjunto dos números reais.

Pode-se pedir ao aluno que resolva a equação $x^2 + 9 = 0$, deixando que ele perceba que não há solução real. Então, discutir com a classe a definição da unidade imaginária e incentivar os alunos a achar soluções não reais para a equação.

Exemplo

Vamos resolver a equação do 2º grau $x^2 + 9 = 0$.

Note que: $x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9$

No universo real, essa equação não tem solução, pois não existe número real que elevado ao quadrado resulte em -9. Mas, se considerarmos que existe um número i, não real, tal que $i^2 = -1$, temos:

$x^2 = -9 \Rightarrow x^2 = (-1) \cdot 9 \Rightarrow x^2 = 9i^2$

Como $(\pm 3i)^2 = 9i^2 = 9 \cdot (-1) = -9$, temos:

$x = \pm\, 3i$

Logo, $x = 3i$ ou $x = -3i$ e $S = \{3i, -3i\}$.

Como já sabíamos, as soluções encontradas para essa equação ($3i$ e $-3i$) não são números reais. Então, que números são esses? Como chamá-los?

Nesse caso, foi muito útil a contribuição do matemático alemão Carl Friedrich Gauss, que, em seus trabalhos desenvolvidos no começo do século XIX, chamou tais números de **números complexos**.

Exercícios resolvidos

R1. Resolver a equação $x^2 - 2x + 5 = 0$ utilizando a definição de unidade imaginária ($i^2 = -1$).

▶ ***Resolução***

Resolvendo a equação:

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (5)}}{2 \cdot (1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16i^2}}{2}$$

Como $(\pm 4i)^2 = 16i^2 = 16 \cdot (-1) = -16$, temos:

$$x = \frac{2 \pm 4i}{2} = \frac{2 \cdot (1 \pm 2i)}{2} = 1 + 2i \text{ ou } 1 - 2i$$

Portanto: $S = \{1 + 2i,\ 1 - 2i\}$

R2. Resolver a equação $x^2 - 4x + 6 = 0$, no universo dos números complexos.

▶ ***Resolução***

Resolvendo a equação:

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (6)}}{2 \cdot (1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8 \cdot (-1)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8i^2}}{2}$$

Como $\left(\pm 2i \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 4i^2 \cdot 2 = 8 \cdot (-1) = -8$, temos:

$$x = \frac{4 \pm 2i \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot \left(2 \pm i \cdot \sqrt{2}\right)}{2}$$

$$x = 2 + i \cdot \sqrt{2} \text{ ou } x = 2 - i \cdot \sqrt{2}$$

Portanto: $S = \left\{2 + i\sqrt{2},\ 2 - i\sqrt{2}\right\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Resolva as equações a seguir utilizando a definição de unidade imaginária.

a) $x^2 + 16 = 0$

$S = \{-4i, 4i\}$

b) $x^2 - 6x + 13 = 0$

$S = \{3 - 2i, 3 + 2i\}$

2. Resolva as equações a seguir no universo dos números complexos.

a) $-x^2 - 3 = 0$

b) $4x^2 - 4x + 3 = 0$

2. a) $S = \left\{-\sqrt{3}i, \sqrt{3}i\right\}$ **b)** $S = \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

1.3 A forma algébrica de um número complexo

Número complexo é todo número que pode ser escrito na forma $\mathbf{z = a + bi}$, em que $a, b \in \mathbb{R}$, e i é a unidade imaginária.

Essa é a chamada **forma algébrica** do número complexo z.

O coeficiente a é a **parte real** de z, representada por $\text{Re}(z)$, e o coeficiente b é a **parte imaginária** de z, representada por $\text{Im}(z)$.

Reflita

Você sabe por que o número real b é chamado de parte imaginária de $z = a + bi$?

Porque ele é o coeficiente da parte não real de z (é o coeficiente da unidade imaginária i).

Exemplos

a) $z = 3 - 2i$ é um número complexo com $\text{Re}(z) = 3$ e $\text{Im}(z) = -2$.

b) $z = -7 + 5i$ é um número complexo com $\text{Re}(z) = -7$ e $\text{Im}(z) = 5$.

c) $z = 3 = 3 + 0i$ é um número complexo com $\text{Re}(z) = 3$ e $\text{Im}(z) = 0$.

Nesse caso, z é também um número real, pois a parte imaginária de z é nula.

d) $z = 4i = 0 + 4i$ é um número complexo com $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) = 4$.

Nesse caso, z é chamado de **imaginário puro**, pois a parte real de z é nula e a parte imaginária é não nula.

■ Igualdade de números complexos

Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, definimos a igualdade $z = w$ quando $\text{Re}(z) = \text{Re}(w)$ e $\text{Im}(z) = \text{Im}(w)$, ou seja:

$$z = w \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Exemplo

Os números complexos $z = 8 + bi$ e $w = a - \sqrt{2}i$, com $a, b \in \mathbb{R}$, são iguais se, e somente se:

- $\text{Re}(z) = \text{Re}(w) \Rightarrow 8 = a$
- $\text{Im}(z) = \text{Im}(w) \Rightarrow b = -\sqrt{2}$

1.4 O conjunto dos números complexos

O surgimento dos números complexos levou a uma ampliação dos conjuntos numéricos, tendo sido criado, então, o **conjunto dos números complexos**, representado por $\mathbb{C}$, que pode ser definido por:

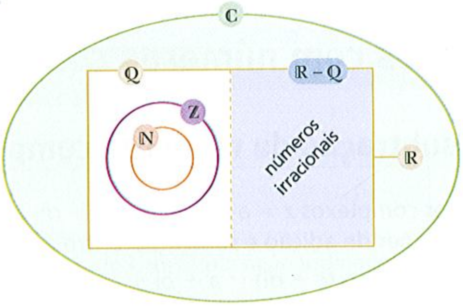
$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi, \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$$

Já vimos que alguns números complexos podem ser um número real.

De fato, considere um número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Se $b = 0$, temos $z = a$; logo, $z \in \mathbb{R}$. No entanto, qualquer número real x pode ser indicado por $x + 0i$. Como $x \in \mathbb{R}$ e $0 \in \mathbb{R}$, $(x + 0i) \in \mathbb{C}$.

Com isso, observamos que o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos. Note, porém, que todo número real é complexo, mas nem todo número complexo é real.

Veja o diagrama:



ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

a) falso
b) verdadeiro
c) verdadeiro
d) verdadeiro
e) verdadeiro

Se julgar interessante, dar exemplos de elementos para cada conjunto numérico, lembrando aos alunos, se necessário, de que conjunto se trata e da relação de inclusão.

Reflita

Classifique como verdadeiro ou falso:

a) $-3 \in \mathbb{N}$

b) $-3 \in \mathbb{Z}$

c) $-3 \in \mathbb{Q}$

d) $-3 \in \mathbb{R}$

e) $-3 \in \mathbb{C}$

Exercícios resolvidos

R3. Determinar os valores reais de x e y para que o número complexo $z = (x^2 - 4) + (2y - 6)i$ seja:

a) um número imaginário puro;

b) um número real não nulo;

c) o número zero.

▸ ***Resolução***

a) Para que z seja um número imaginário puro, devemos ter:

$\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) \neq 0$

Assim:

- $\text{Re}(z) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
- $\text{Im}(z) \neq 0 \Rightarrow 2y - 6 \neq 0 \Rightarrow 2y \neq 6 \Rightarrow y \neq 3$

Logo, $x = 2$ e $y \neq 3$ ou $x = -2$ e $y \neq 3$.

b) Para que z seja um número real não nulo:

$\text{Re}(z) \neq 0$ e $\text{Im}(z) = 0$

Assim:

- $\text{Re}(z) \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$ e $x \neq -2$
- $\text{Im}(z) = 0 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$

Logo, $x \neq 2$, $x \neq -2$ e $y = 3$.

c) Para que z seja o número real zero, devemos ter $z = 0 + 0i$, ou seja:

$\text{Re}(z) = \text{Im}(z) = 0$

Assim:

- $\text{Re}(z) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$
- $\text{Im}(z) = 0 \Rightarrow y = 3$

Logo, $x = 2$ e $y = 3$ ou $x = -2$ e $y = 3$.

R4. Achar os valores reais de a e b para que os números complexos $z = -2 + 5i$ e $w = 2a + (b^2 + 1)i$ sejam iguais.

▸ ***Resolução***

Para que os números complexos z e w sejam iguais, devemos ter:

- $\text{Re}(z) = \text{Re}(w)$

$-2 = 2a$

$a = -1$

- $\text{Im}(z) = \text{Im}(w)$

$5 = b^2 + 1$

$b^2 = 4$

$b = 2$ ou $b = -2$

Portanto, $a = -1$ e $b = 2$ ou $a = -1$ e $b = -2$.

R5. Calcular $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 9 + (x + 3)i = 0$.

▸ ***Resolução***

Reescrevemos a igualdade da seguinte forma:

$(x^2 - 9) + (x + 3)i = 0 + 0i$

Então, pela definição de igualdade de números complexos, temos:

$$\begin{cases} x^2 - 9 = 0 & \text{(I)} \\ x + 3 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

(I): $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$

(II): $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

Apenas -3 atende às duas equações.

Portanto, $x = -3$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

3. Identifique e escreva no caderno a parte real e a parte imaginária de z em cada caso. Ver resolução no Guia do professor.

a) $z = \sqrt{3} - i \cdot \sqrt{5}$

b) $z = \dfrac{1 + 2i}{3}$

c) $z = 9i$

d) $z = 4$

e) $z = -i$

4. Determine os valores reais de x e y, para que os números complexos sejam imaginários puros.

a) $z = 2x + 3yi$ $x = 0$ e $y \neq 0$

b) $w = (1 - 2y) + 10i$ $y = \dfrac{1}{2}$

5. Para que o complexo $z = 2 + (a^2 - 1)i$ seja um número real, quais devem ser os valores reais de a? 1 ou −1

6. Seja $z = (3m + n + 1) + (2m - 3n - 2)i$, calcule m e n, reais, para que z seja zero. $m = -\dfrac{1}{11}$ e $n = -\dfrac{8}{11}$

7. Resolva as equações, para $x \in \mathbb{R}$.

a) $2x + (x - 3)i = 12 + 3i$ $S = \{6\}$

b) $(2x + 10) + (x^2 - 25)i = 0$ $S = \{-5\}$

c) $(x^3 + 8) + (x + 2)i = 0$ $S = \{-2\}$

8. Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações do 2º grau.

a) $x^2 + 4 = 0$ $S = \{-2i, 2i\}$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$ $S = \{2, 3\}$

c) $x^2 + 4\sqrt{2}x + 6 = 0$ $S = \left(-\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\right)$

2 Operações com números complexos

2.1 Adição e subtração de números complexos

Observação

Para qualquer complexo $z = a + bi$, existe o oposto de z, dado por: $-z = -a - bi$

Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, podemos definir as operações de adição e subtração entre z e w da seguinte forma:

Adição: $z + w = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$

Subtração: $z - w = (a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$

Exemplos

Sejam os números complexos $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = i$ e $z_3 = -7$. Vamos calcular:

a) $z_1 + z_2 + z_3$

Para efetuar a adição solicitada, adicionamos as partes reais e adicionamos as partes imaginárias de z_1, z_2 e z_3. Em seguida, reduzimos os termos semelhantes. Assim:

$$z_1 + z_2 + z_3 = (1 + 3i) + (0 + i) + (-7 + 0i) = 1 + 3i + 0 + i - 7 + 0i =$$
$$= (1 + 0 - 7) + (3 + 1 + 0)i = -6 + 4i$$

b) $z_2 - (z_1 + z_3)$

Para efetuar a expressão indicada, devemos, inicialmente, calcular a adição $z_1 + z_3$. Em seguida, subtraímos de z_2 o resultado obtido. Assim:

$$z_1 + z_3 = 1 + 3i - 7 = -6 + 3i$$
$$z_2 - (z_1 + z_3) = i - (-6 + 3i) = i + 6 - 3i = 6 - 2i$$

2.2 Multiplicação de números complexos

Observação

Para a adição e a multiplicação de números complexos são válidas as propriedades associativa, comutativa e existência do elemento neutro.

Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, podemos efetuar a multiplicação entre z e w aplicando a propriedade distributiva:

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

Como $i^2 = -1$, temos: $z \cdot w = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Exemplos

Dados os complexos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4 - 2i$ e $z_3 = 5$, vamos calcular:

a) $z_1 \cdot z_2 = (1 + i)(4 - 2i) = 4 - 2i + 4i - 2i^2 = 4 + 2i - 2 \cdot (-1) = 6 + 2i$

b) $(z_2)^2 = z_2 \cdot z_2 = (4 - 2i)(4 - 2i) = 16 - 8i - 8i + 4i^2 = 16 - 16i + 4 \cdot (-1) =$
$= 16 - 16i - 4 = 12 - 16i$

c) $2 \cdot (z_1 \cdot z_2 \cdot z_3) = 2 \cdot (1 + i)(4 - 2i) \cdot 5 = 10 \cdot (6 + 2i) = 60 + 20i$

Reflita

Calcule $(4 - 2i)^2$ usando produto notável.

$(4 - 2i)^2 = 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2i + (2i)^2 =$
$= 16 - 16i - 4 = 12 - 16i$

2.3 O conjugado de um número complexo

Dado um número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, chamamos de **conjugado de z**, cuja notação é $\bar{z}$, o número complexo $\bar{z} = a - bi$.

Note que, para obter $\bar{z}$, basta trocar o sinal da parte imaginária de z.

Observação

Não confunda:
- conjugado de z:
  $\bar{z} = a - bi$
- oposto de z:
  $-z = -a - bi$

Exemplo

Os conjugados dos números complexos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -3 - 5i$, $z_3 = 3$ e $z_4 = -i$ são:
$\bar{z}_1 = 1 - i$, $\bar{z}_2 = -3 + 5i$, $\bar{z}_3 = 3$ e $\bar{z}_4 = i$

Propriedades do conjugado

Dado $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, são válidas para $\bar{z}$ as seguintes propriedades:

1. $\bar{\bar{z}} = z$ **2.** $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ **3.** $\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 = \overline{z_1 \pm z_2}$ **4.** $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$

Reflita

Com a ajuda de um colega, verifiquem as propriedades **1, 2, 3** e **4.**

Ver resolução no Guia do professor.

Exercícios resolvidos

R6. Determinar os valores reais de x e y para que se tenha: $(x + 2yi) \cdot (1 - 3i) = -1$

▶ ***Resolução***

Começamos efetuando a multiplicação indicada:

$(x + 2yi) \cdot (1 - 3i) = -1$

$x - 3xi + 2yi - 6yi^2 = -1$, com $i^2 = -1$

$(x + 6y) + (-3x + 2y)i = -1 + 0i$

Da igualdade de números complexos, temos:

$$\begin{cases} x + 6y = -1 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema: $x = -\dfrac{1}{10}$ e $y = -\dfrac{3}{20}$

R7. Sendo $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = -1 - 5i$, calcular:

$\bar{\bar{\bar{z}}}_1 + 2 \cdot \left(\overline{z_1 + z_2}\right) - \text{Re}(\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_1)$

▶ ***Resolução***

Temos: $\bar{z}_1 = 2 - 3i$ e $\bar{z}_2 = -1 + 5i$

Assim, aplicando as propriedades, obtemos:

$\bar{\bar{\bar{z}}}_1 + 2 \cdot \left(\overline{z_1 + z_2}\right) - \text{Re}(\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_1) =$

$= \bar{z}_1 + 2 \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) - \text{Re}[(\bar{z}_1)^2] =$

$= (2 - 3i) + 2 \cdot (1 + 2i) - \text{Re}(4 - 12i - 9) =$

$= 2 - 3i + 2 + 4i - (4 - 9) = 4 + i + 5 =$

$= 9 + i$

12. • É sempre um número real não negativo formado pela soma dos quadrados da parte real e da parte imaginária de z (ou de $\bar{z}$).

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

9. Efetue em seu caderno:

a) $(4 + i) + (3 + 3i)$ $7 + 4i$

b) $(11 - i\sqrt{2}) - (5 + 2i\sqrt{2})$ $6 - 3i\sqrt{2}$

c) $(5 + 2i)^2 \cdot (1 + i)$ $1 + 41i$

10. Calcule os valores reais de x e y para que a igualdade se verifique: $(3x^2 + 4xyi) - (x^2 + yi) = 8 + 3i$

$x = 2$ e $y = \frac{3}{7}$ ou $x = -2$ e $y = -\frac{1}{3}$

11. Verifique se o número complexo $z = 1 - i$ é raiz da equação $z^2 - 2z + 2 = 0$. É raiz.

12. Calcule $z \cdot \bar{z}$ em cada caso.

a) $z = -3 - 2i$ 13 **c)** $z = -\sqrt{5}$ 5

b) $z = 2i$ 4 **d)** $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ $a^2 + b^2$

- Que tipo de número é o produto $z \cdot \bar{z}$?

13. Sendo $z = 3 - 2i$, calcule $z + \bar{z}$ e compare com $\text{Re}(z)$. $6 = 2 \cdot \text{Re}(z)$

- O que você pode observar?

Que o valor de $z + \bar{z}$ é o dobro da parte real de z.

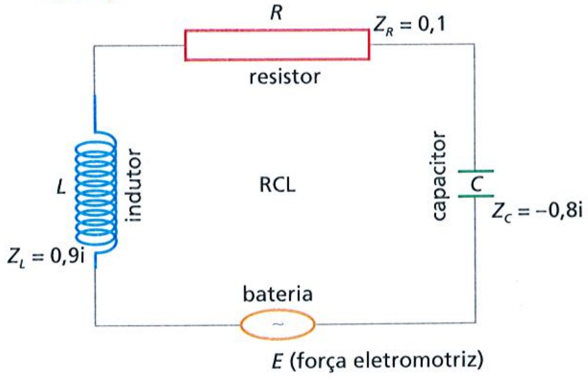
14. Mostre em seu caderno que: $z - \bar{z} = 2i \cdot \text{Im}(z)$

15. Um circuito RLC contém um resistor, um indutor e um capacitor. A medida de resistência de um circuito RLC é chamada de **impedância** (Z) e é expressa por um número complexo.

Num circuito RLC em série, a impedância equivalente ($Z_{eq.}$) é dada por: $Z_{eq.} = Z_R + Z_L + Z_C$

Ache $Z_{eq.}$ no circuito RLC, em série, abaixo:

$0{,}1 + 0{,}1i$



ADILSON SECCO

14. Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Então:
$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi = 2i \cdot b = 2i \cdot \text{Im}(z)$

2.4 Divisão de números complexos

Dados dois números complexos z e w, com $w \neq 0$, podemos efetuar a divisão entre z e w por meio de um processo semelhante à racionalização de denominadores. Para obter o quociente $\frac{z}{w}$, multiplicamos numerador e denominador pelo conjugado do denominador ($\overline{w}$).

Assim: $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}}$

Observação

Para qualquer complexo não nulo $z = a + bi$, existe o inverso de z, indicado por $z^{-1} = \frac{1}{z}$, dado por:

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Note que, ao multiplicar um número complexo pelo seu conjugado, obtemos sempre um número real.

Exercício resolvido

R8. Calcular os quocientes: $\frac{1}{i}$ (inverso de i), $\frac{-2+i}{3-2i}$ e $\frac{(3-2i)^2}{-2+i}$

▶ ***Resolução***

Note que para calcular o quociente $\frac{1}{i}$ basta multiplicar numerador e denominador por $-i$, ou seja: $\frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$

Isso pode ser feito sempre que o denominador for um número imaginário puro. Nos demais casos, multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador:

- $\frac{-2+i}{3-2i} = \frac{(-2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{-6-4i+3i+2i^2}{9+6i-6i-4i^2} = \frac{-8-i}{13} = -\frac{8}{13} - \frac{1}{13}i$
- $\frac{(3-2i)^2}{-2+i} = \frac{9-12i+4i^2}{-2+i} = \frac{5-12i}{-2+i} = \frac{(5-12i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-10-5i+24i+12i^2}{(4+2i-2i-i^2)} = \frac{-22+19i}{4+1} = -\frac{22}{5} + \frac{19}{5}i$

Reflita

Calcule:

- o inverso de 2; $\frac{1}{2}$
- o inverso de $-i$; i
- o inverso de $-5i$. $\frac{i}{5}$

Reflita

Considere um número complexo z não nulo. Agora multiplique z pelo seu inverso $\frac{1}{z}$. O que obtemos como resultado? 1

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução das questões **16** e **17** no Guia do professor.

16. Determine o inverso de cada número complexo abaixo.

a) $z = 1 + i$

b) $z = 2i$

c) $z = 3 - 4i$

d) $z = a - bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$

17. Efetue as divisões indicadas.

a) $\frac{1+2i}{3-2i}$ **b)** $\frac{4-10i}{-2i}$ **c)** $\frac{5}{6+6i}$ **d)** $\frac{2+i\sqrt{7}}{1+i\sqrt{7}}$

Verifique a conveniência de trabalhar a questão **18** com o professor de Física.

18. Para um circuito RLC, a primeira lei de Ohm é dada por: $E = Z_{eq.} \cdot I$, sendo E a força eletromotriz, I a corrente elétrica e $Z_{eq.}$ a impedância equivalente desse circuito. Considerando o circuito RLC dado no exercício **15**, determine:

a) a força E, em volt, quando $I = 20 + 100i$; $-8 + 12i$

b) a corrente I, em ampères, quando $E = i - 1$. $10i$

2.5 As potências de i

Observe, abaixo, o cálculo de algumas potências de i.

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$

$i^5 = i^2 \cdot i^2 \cdot i = i$

$i^6 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 = -1$

$i^7 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i = -i$

$i^8 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 = 1$

$i^9 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i = i$

... e assim por diante.

As potências de i se repetem em grupos de quatro valores, seguindo o padrão das potências i^0, i^1, i^2 e i^3. Então, para calcular a potência i^n, com $n \in \mathbb{N}$, efetuamos a divisão de n por 4 e consideramos o resto dessa divisão como o novo expoente de i.

Para expoentes inteiros negativos, o cálculo da potência i^{-n}, com $n \in \mathbb{N}^*$, é feito utilizando-se o conceito de inverso, ou seja: $i^{-n} = \frac{1}{i^n}$

Exercícios resolvidos

R9. Simplificar: $\dfrac{3i^{44} + 12i^{33}}{-3i^{50}}$

▶ ***Resolução***

Vamos determinar o valor de i^{44}, i^{33} e i^{50} efetuando as divisões de 44, 33 e 50 por 4 e levando em conta os restos obtidos.

$$\begin{array}{r|l} 44 & 4 \\ \hline \mathbf{0} & 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 33 & 4 \\ \hline \mathbf{1} & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 4 \\ \hline \mathbf{2} & 12 \end{array}$$

Assim:

$i^{44} = i^0 = 1 \qquad i^{33} = i^1 = i \qquad i^{50} = i^2 = -1$

Substituindo na expressão dada, temos:

$$\frac{3i^{44} + 12i^{33}}{-3i^{50}} = \frac{3 \cdot (1) + 12 \cdot (i)}{-3 \cdot (-1)} = 1 + 4i$$

R10. Encontrar o valor da expressão $z^3 - \dfrac{1}{z} \cdot (z - \bar{z}) - \bar{\bar{z}}$, sendo $z = -2i$.

▶ ***Resolução***

$$z^3 - \frac{1}{z} \cdot (z - \bar{z}) - \bar{\bar{z}} =$$
$$= z^3 - \frac{1}{z} \cdot [-2i - (2i)] - z =$$
$$= (-2i)^3 - \frac{1}{(-2i)} \cdot (-4i) - (-2i) =$$
$$= -8i^3 + 1 \cdot (-2) + 2i =$$
$$= 8i - 2 + 2i =$$
$$= -2 + 10i$$

20. c) −1, se *n* é par e 1, se *n* é ímpar

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

19. Efetue:

a) $2i^8 + (1 + 4i)^2$ $-13 + 8i$ **b)** $\dfrac{(2i)^2 + 4(2i)^3}{(2i)^{20}}$ $-\dfrac{4}{2^{20}} - \dfrac{32}{2^{20}}i$

20. Calcule em seu caderno:

a) i^{90} -1 **b)** i^{330} -1 **c)** i^{2n+2} . **d)** i^{4n} 1

21. Verifique se são verdadeiras as igualdades.

a) $i^{20} + i^{30} = i^{20+30}$ falsa **c)** $(i^4)^6 = (i^6)^4$ verdadeira

b) $i^{20} \cdot i^{30} = i^{20 \cdot 30}$ falsa **d)** $i^{4^4} = (i^4)^4$ verdadeira

22. Dado o complexo $z = xi$, calcule x real para que se tenha z^{54} real positivo. Não existe *x* real.

23. Calcule as somas indicadas e observe o padrão.

a) $i^0 + i^1 + i^2 + i^3$ zero

b) $i^4 + i^5 + i^6 + i^7$ zero

c) Utilizando o padrão observado, calcule:

$i^{10} + i^{11} + i^{12} + \ldots + i^{99}$ $-1 - i$

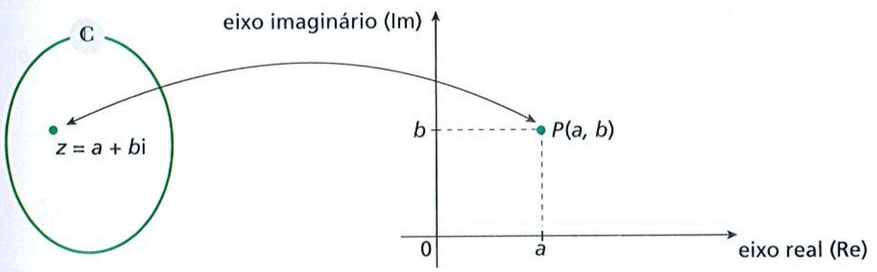
3 Representação geométrica de um número complexo

3.1 O plano de Argand-Gauss

No início do século XIX, trabalhando de maneira independente, Gauss e Jean Robert Argand (1768-1822), com base nas ideias de Caspar Wessel (1745-1818), notaram uma associação entre as partes real e imaginária de um número complexo e as coordenadas de um ponto no plano cartesiano, tornando mais fácil a visualização desses números.

Da mesma forma que a cada número real pode-se associar um único ponto da reta real, a cada elemento $a + bi$ (com $a, b \in \mathbb{R}$) do conjunto dos números complexos corresponde um único ponto $P(a, b)$ do plano cartesiano e vice-versa. A parte real de z é representada no eixo das abscissas, que é chamado de **eixo real**, e a parte imaginária, no eixo das ordenadas, que é o **eixo imaginário.**

É importante fazer o paralelo entre os elementos do conjunto dos números complexos e os pontos no plano cartesiano. O aluno deve assimilar muito bem esse conceito antes de prosseguir com os demais tópicos.



ADILSON SECCO

O plano cartesiano assim redefinido passa a ser chamado de **plano de Argand-Gauss** ou **plano complexo**. O ponto $P(a, b)$ é a **imagem de z** nesse plano ou o **afixo** do número complexo $z = a + bi$ (com $a, b \in \mathbb{R}$).

A correspondência entre os números complexos e suas imagens geométricas é biunívoca; por isso podemos fazer a identificação $z = a + bi = (a, b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Observe que:

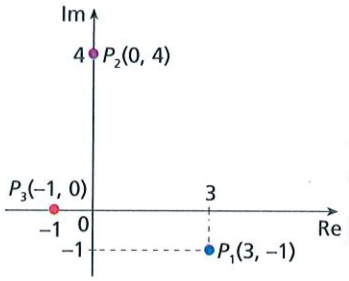
- o número real zero é representado pelo ponto (0, 0);
- todo número complexo real tem sua parte imaginária igual a zero. Logo, sua imagem é um ponto pertencente ao eixo real (Re);
- todo número complexo imaginário puro tem sua parte real igual a zero. Logo, sua imagem é um ponto pertencente ao eixo imaginário (Im).

Exemplo

Vamos representar no plano complexo as imagens dos números complexos:

$z_1 = 3 - i$, $z_2 = 4i$ e $z_3 = -1$

Note que as imagens de z_1, z_2 e z_3 são, respectivamente, os pontos $P_1(3, -1)$, $P_2(0, 4)$ e $P_3(-1, 0)$, representados ao lado.



ADILSON SECCO

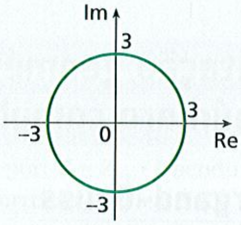
Mais à frente, o aluno será solicitado a resolver este exercício usando o conceito de módulo de um número complexo. Aqui pode ser explorada a equação de uma circunferência.

Exercício resolvido

R11. Representar no plano complexo todos os números complexos cuja distância de suas imagens à origem (0, 0) do plano de Argand-Gauss seja igual a 3.

▸ ***Resolução***

Note que todos os pontos do plano que distam 3 da origem (0, 0) definem uma circunferência de centro na origem e raio 3.



ADILSON SECCO

3.2 O número complexo como um vetor

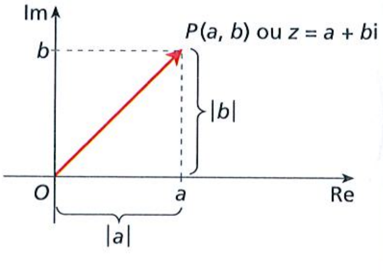
Nesta seção, espera-se que o aluno já tenha visto o conceito de vetor. Caso seja necessário, pode-se fazer uma breve recordação.

Vetor é um segmento de reta orientado.

Todo vetor é:

- determinado por dois pontos do plano: uma origem e uma extremidade;
- caracterizado por uma direção, um sentido e seu módulo (comprimento do segmento).

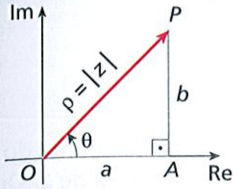
Como já sabemos, todo número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, pode ser representado geometricamente por um ponto $P(a, b)$ no plano de Argand-Gauss. Um número complexo não nulo pode ser representado também por um vetor $\overrightarrow{OP}$ de origem no ponto $O(0, 0)$, origem do plano complexo, e extremidade no ponto $P(a, b)$.



ADILSON SECCO

Módulo de um número complexo

Observe a figura a seguir:



ADILSON SECCO

O **módulo** de $z = a + bi$, indicado por $|z|$ ou ρ, é o módulo do vetor $\overrightarrow{OP}$ que o representa (comprimento do vetor), ou seja, é a distância da origem $O(0, 0)$ ao ponto $P(a, b)$.

Assim, no triângulo *OAP*, temos: $|z| = d_{O,P} = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observação

- ρ: letra grega rô.
- θ: letra grega teta.

Reflita

- Resolva o exercício **R11** utilizando o conceito de módulo de um número complexo.
- Represente no plano complexo todos os números complexos *z* tais que $|z| \leqslant 3$.

Ver resolução no Guia do professor.

Argumento de um número complexo

A direção do vetor $\overrightarrow{OP}$ é dada pelo ângulo θ (com $0 \leqslant \theta < 2\pi$), formado pelo vetor e pelo semieixo real positivo, considerado no sentido anti-horário. Para um complexo não nulo z ($z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$), o ângulo θ é chamado de **argumento de *z***, indicado por **arg(*z*)**.

Também temos que:

$$\theta \text{ é o ângulo tal que } \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \text{ e } \cos\theta = \frac{a}{\rho}, \text{ com } \rho = |z| \text{ e } 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

Exercício resolvido

R12. Representar geometricamente o número complexo $z = 2 + 2i$ e obter o módulo e o argumento de z.

▸ ***Resolução***

No plano, $z = 2 + 2i$ é representado pelo ponto $P(2, 2)$.

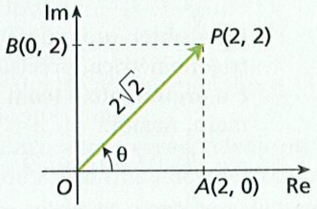
O módulo de z é dado por: $\rho = d_{O,P} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Para obter o argumento de z, vamos considerar o triângulo retângulo *OAP*.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{AP}{OP} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\rho} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{OA}{OP} = \frac{\operatorname{Re}(z)}{\rho} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $0 \leqslant \theta < 2\pi$, temos $\theta = \frac{\pi}{4}$.



ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução das questões **24, 25, 26, 27** e **28** no Guia do professor.

24. Represente no plano complexo e obtenha $|z|$ e arg(z).

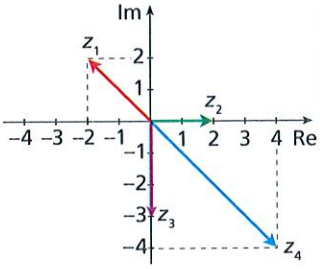
a) $z_1 = 1 + i$

b) $z_2 = -\sqrt{3} + i$

c) $z_3 = 5i$

d) $z_4 = -2\sqrt{3} + 2i$

25. Escreva os números complexos na sua forma algébrica e depois determine o módulo e o argumento de cada um deles.



ADILSON SECCO

26. Represente no plano os números complexos z tais que:

a) $|z| = 5$

b) $|z| > 2$

c) $|z - 2| = 1$

d) $|z + i| < 4$

27. Sendo $z_1 = -4 + 2i$ e $z_2 = 6 - 3i$, represente no mesmo plano complexo z_1, z_2, $z_1 + z_2$ e $z_1 - z_2$.

28. Sendo $z = -2 + i$, represente no mesmo plano complexo z e 2z. Que relação existe entre seus módulos e argumentos? Essa relação seria a mesma para z e $-2z$? Justifique.

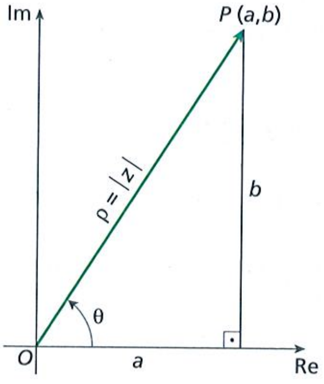
29. Dado o número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, determine:

a) $\bar{z}$, $|z|^2$ e $z \cdot \bar{z}$ $a - bi$, $a^2 + b^2$ e $a^2 + b^2$

b) Analisando com um colega os resultados obtidos no item anterior, o que se pode concluir? $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

4 A forma trigonométrica de um número complexo

4.1 Forma trigonométrica ou polar



ADILSON SECCO

Como vimos, podemos identificar um número complexo com um ponto do plano *P*(*a*, *b*) ou com um vetor que determina o argumento e o módulo de *z*. Quando associamos *z* com um ponto do plano, estamos expressando *z* por coordenadas cartesianas (*a* e *b*). Quando a associação é feita com um vetor, dizemos que temos as coordenadas polares de *z*, que são o argumento θ e o módulo ρ ($\rho \in \mathbb{R}_+^*$).

Vamos ver agora como expressar o número complexo $z = a + bi$, não nulo e com $a, b \in \mathbb{R}$, por meio de suas coordenadas polares, obtendo a chamada **forma trigonométrica** ou **forma polar** de *z*.

Já sabemos que:

- $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \cdot \text{sen}\,\theta$
- $\cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cdot \cos\theta$

Substituindo esses valores na forma algébrica de *z*, temos:

$$z = a + bi = \rho \cdot \cos\theta + (\rho \cdot \text{sen}\,\theta) \cdot i = \rho \cdot \cos\theta + \rho \cdot i \cdot \text{sen}\,\theta$$

$$z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$$

Pode ser oportuno fazer uma revisão do uso do ciclo trigonométrico para determinação do seno e cosseno dos ângulos.

Exercícios resolvidos

R13. Escrever $z = -1 + i$ na forma trigonométrica e representá-lo geometricamente.

▸ ***Resolução***

Para obter um número complexo na forma trigonométrica, precisamos achar o módulo ρ e o argumento θ (com $0 \leqslant \theta < 2\pi$) desse número. Assim:

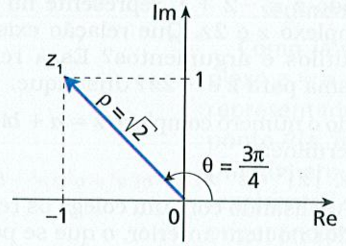
$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$\theta = \dfrac{3\pi}{4}$, pois:

$$\begin{cases} \text{sen}\ \theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\ \theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Logo: $z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$

O número complexo *z* pode ser representado por um vetor de módulo $\sqrt{2}$ e direção $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ (ou 135°).



ADILSON SECCO

R14. Escrever $z = 2i$ na forma trigonométrica e representá-lo geometricamente.

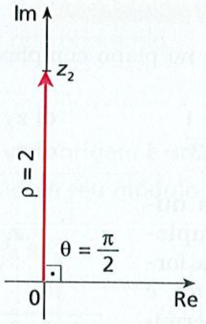
▸ ***Resolução***

$$\rho = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \text{pois:} \begin{cases} \text{sen}\ \theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ \cos\ \theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

Logo: $z = 2 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

O número complexo *z* pode ser representado por um vetor de módulo 2 e direção $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (ou 90°).



ADILSON SECCO

Note que, como *z* é imaginário puro, sua representação é um vetor sobre o eixo imaginário. Se *z* fosse um número real não nulo, seria representado por um vetor sobre o eixo real.

R15. Determinar o módulo, o argumento e a forma trigonométrica do conjugado de $z = 1 + i$. Representar num mesmo plano complexo z e $\bar{z}$.

▸ ***Resolução***

Dado $z = a + bi$, temos que $\bar{z} = a - bi$. Note que: $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\bar{z}|$.

Assim: $|\bar{z}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (sendo $\bar{z} = 1 - i$)

Sendo $\theta_1 = \arg(z)$, temos:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \arg(z) = \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

Sendo $\theta_2 = \arg(\bar{z})$, temos:

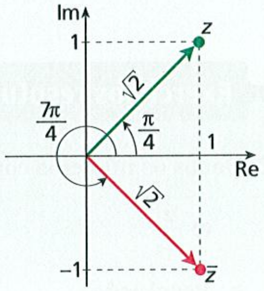
$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta_2 &= \frac{(-1)}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \arg(\bar{z}) = \theta_2 = \frac{7\pi}{4}$$

Então: $\bar{z} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

Note que $\arg(\bar{z}) = \frac{7\pi}{4}$ é côngruo a $-\frac{\pi}{4} = -\arg(z)$. Assim:

$$\bar{z} = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2} \cdot [\cos(-\theta_1) + i \cdot \operatorname{sen}(-\theta_1)]$$

Geometricamente, z e $\bar{z}$ são representados por pontos simétricos em relação ao eixo real.



Reflita

Todo número complexo pode ser representado na forma trigonométrica? Justifique.

Não, $z = 0$ não tem forma trigonométrica, pois o argumento só está definido para números complexos não nulos.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução das questões **30**, **32**, **33** e **34** no Guia do professor.

30. Expresse z e $\bar{z}$ na forma trigonométrica:
a) $z = 1 - i$ **b)** $z = -4 - 4i$ **c)** $z = 8$

31. Substitua os valores de cosseno e de seno para obter a forma algébrica:
a) $z = \cos\pi + i \cdot \operatorname{sen}\pi$ -1
b) $z = 6 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$ $-3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$

32. Sejam os números $z = 1 + i\sqrt{3}$ e $w = 2\sqrt{3} + 2i$.
a) Expresse z, w e zw na forma trigonométrica.
b) Compare o módulo e o argumento de zw com o módulo e o argumento de z e de w.

33. Sendo $z = 3 \cdot (\cos 0° + i \cdot \operatorname{sen} 0°)$, calcule z^{-1}. Represente geometricamente z e z^{-1}.

34. Considere o complexo $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
a) Calcule o produto iz.
b) Represente os vetores correspondentes a z e iz num mesmo plano complexo.
c) O que ocorreu com o vetor correspondente quando multiplicamos z pela unidade imaginária i?
d) Discuta com um colega se a resposta do item **c** pode ser generalizada para qualquer complexo z. Justifiquem.

5 Operações na forma trigonométrica

5.1 Multiplicação e divisão

Considere os números complexos z_1 e z_2 de módulos ρ_1 e ρ_2 e argumentos θ_1 e θ_2, respectivamente não nulos, na forma trigonométrica:
$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2)$

- Vamos obter o produto z_1z_2:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= [\rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1)] \cdot [\rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2)] = \\ &= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2) = \\ &= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i \cdot \cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i^2 \cdot \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2) = \\ &= \rho_1\rho_2[(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2) + i \cdot (\cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2)] \end{aligned}$$

Assim: $z_1z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

Se necessário, fazer uma revisão das fórmulas de adição e subtração de arcos.

Observação

Podemos generalizar o resultado para o caso da multiplicação de n fatores complexos:
$z = z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n$
Obtemos:
$\rho = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot ... \cdot \rho_n$
$\theta = \theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n$

- Vamos obter o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ multiplicando-o por $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i\cdot\operatorname{sen}\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i\cdot\operatorname{sen}\theta_2)} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i\cdot\operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 - i\cdot\operatorname{sen}\theta_2)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i\cdot\operatorname{sen}\theta_2)(\cos\theta_2 - i\cdot\operatorname{sen}\theta_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 - i\cdot\cos\theta_1\cdot\operatorname{sen}\theta_2 + i\cdot\operatorname{sen}\theta_1\cdot\cos\theta_2 - i^2\cdot\operatorname{sen}\theta_1\cdot\operatorname{sen}\theta_2}{\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\cdot\operatorname{sen}\theta_2) + i\cdot(\operatorname{sen}\theta_1\cdot\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2\cdot\cos\theta_1)}{1}$$

Assim: $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\cdot\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right]}$

Reflita

Sendo z um número complexo não nulo, o quociente $\frac{z}{z}$ é 1.

Qual é o quociente $\frac{\bar{z}}{\bar{z}}$? 1

Exercícios resolvidos

R16. Dados os números complexos $z_1 = 3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ e $z_2 = 4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, calcular:

a) $\frac{z_1}{z_2}$

b) $z_1\bar{z}_1$

▶ ***Resolução***

a) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\cdot\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right] =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{3}{4}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

b) Como $\bar{z}_1 = 3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$, temos:

$$z_1\bar{z}_1 = 3^2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 9\cdot\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)^2\right] =$$

$$= 9\cdot\left(\cos^2\frac{\pi}{2} - i^2\cdot\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2}\right) = 9\cdot\left(\cos^2\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2}\right) = 9\cdot 1 = 9$$

R17. Sejam os números complexos z e w, escritos na forma trigonométrica:

$$z = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) \text{ e } w = 4\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

a) Obter o produto zw.

b) Representar os vetores associados a z, w e zw no plano complexo.

Reflita

Se $z = \rho(\cos\theta_1 + i\cdot\operatorname{sen}\theta_1)$ e $w = \cos\theta_2 + i\cdot\operatorname{sen}\theta_2$, qual será a interpretação geométrica do produto zw?

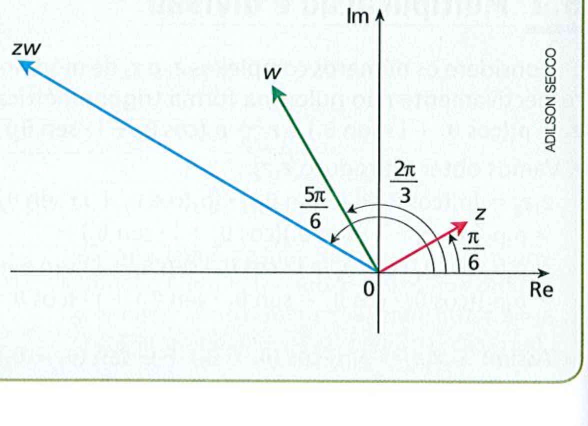
Como w tem módulo igual a 1, o módulo de zw será igual ao de z. Disso segue que o vetor associado a z vai mudar da direção θ_1 para a direção $\theta_1 + \theta_2$, mas permanecerá com mesmo módulo.

▶ ***Resolução***

a) $$zw = 2\cdot 4\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = 8\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$$

b) A representação dos vetores é mostrada na figura a seguir.

Observe que o produto zw representa uma rotação, no sentido anti-horário, de $\frac{2\pi}{3}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)$ em relação a z, ou seja, o número complexo z, que possui argumento $\frac{\pi}{6}$, ao ser multiplicado por w, o vetor associado ao número complexo z, sofreu uma rotação equivalente a $\frac{2\pi}{3}$, que é o argumento de w. Assim, o produto zw possui argumento $\frac{5\pi}{6}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)$. Além disso, o módulo de zw é igual ao produto dos módulos dos números complexos z e w, ou seja, $2\cdot 4 = 8$.



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução das questões **35** e **37** no Guia do professor.

35. Considere os números complexos:

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) \text{ e } z_2 = 4 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$$

Calcule em seu caderno:

a) $z_1 z_2$

b) $\frac{z_1}{z_2}$

c) $z_1 z_1 z_1 z_1$

d) $\frac{z_2}{z_1}$

36. Um número complexo z tem módulo 5 e argumento $\frac{2\pi}{3}$. Determine o módulo e o argumento do complexo w tal que $zw = 1$. $\rho_w = \frac{1}{5}$ e $\theta_w = \frac{4\pi}{3}$

37. Considere os complexos:

$$z = 2 - 2i \text{ e } w = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

a) Calcule wz e $(wz)^{-1}$ na forma trigonométrica.

b) Compare o módulo e o argumento de wz e $(wz)^{-1}$. O que você observa?

c) Discuta com um colega se esse resultado pode ser generalizado. Justifiquem.

5.2 Potenciação (1ª fórmula de De Moivre)

Já que o conjunto dos números complexos pode ser considerado uma ampliação do conjunto dos números reais, as operações em $\mathbb{C}$ são definidas de modo que mantenha o que já é válido em $\mathbb{R}$. Vamos proceder da mesma forma com a potenciação em $\mathbb{C}$.

Considere um número complexo z, não nulo, na forma trigonométrica. Vamos obter $z^n = [\rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)]^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, recorrendo à multiplicação de complexos na forma trigonométrica vista anteriormente:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z \cdot z}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{\rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta) \cdot \rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta) \cdot \dots \cdot \rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)}_{n \text{ fatores}} =$$

$$= \underbrace{\rho \cdot \rho \cdot \dots \cdot \rho \cdot \rho}_{n \text{ fatores}} \cdot \left[\cos \underbrace{(\theta + \theta + \dots + \theta + \theta)}_{n \text{ parcelas}} + i \cdot \operatorname{sen} \underbrace{(\theta + \theta + \dots + \theta + \theta)}_{n \text{ parcelas}}\right]$$

Ou seja: $z^n = \rho^n \cdot (\cos n\theta + i \cdot \operatorname{sen} n\theta)$

Os casos particulares de expoentes 0 e 1 seguem a definição em $\mathbb{R}$:

$z^0 = (a + bi)^0 = 1$ e $z^1 = (a + bi)^1 = z$ (com $a, b \in \mathbb{R}$)

Pode-se demonstrar que a 1ª fórmula de De Moivre também é válida para $n \in \mathbb{Z}$.

Observação

A fórmula obtida para o cálculo de z^n é chamada de **1ª fórmula de De Moivre**, em homenagem ao matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754), que a apresentou pela primeira vez em 1730.

Exemplo

Dado $z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$, vamos calcular z^7.

Nesse caso, temos $n = 7$, $\rho = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$. Assim:

$$z^7 = 2^7\left[\cos\left(7 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(7 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right] = 128\left(\cos \frac{7\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{7\pi}{3}\right)$$

Logo: $z^7 = 128 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$

Observação

Como $0 \leq \theta < 2\pi$, fazemos:

$$\frac{7\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}$$

Exercícios resolvidos

R18. Dado o número complexo $z = -1 - i\sqrt{3}$, calcular z^{50}.

▸ ***Resolução***

Inicialmente, vamos determinar o módulo e o argumento de z. Em seguida, aplicamos a 1ª fórmula de De Moivre.

O módulo de z é:

$$|z| = \rho = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

O argumento de z é:

$$\begin{cases} \text{sen } \theta = \dfrac{b}{\rho} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \theta = \dfrac{a}{\rho} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$z^{50} = 2^{50}\left[\cos\left(50 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(50 \cdot \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$z^{50} = \underbrace{2^{50} \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen } \frac{2\pi}{3}\right)}_{\text{forma trigonométrica}}$$

Observação

$$50 \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{200\pi}{3} = \frac{198\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} =$$
$$= 66\pi + \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}$$

R19. Considerando o número complexo $w = (1 + i)^n$, obter os valores inteiros de n para que w seja um número real positivo.

▸ ***Resolução***

Inicialmente, vamos expressar a base 1 + i na forma trigonométrica. Para isso, devemos achar o módulo ρ e o argumento θ de 1 + i.

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \text{sen } \theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

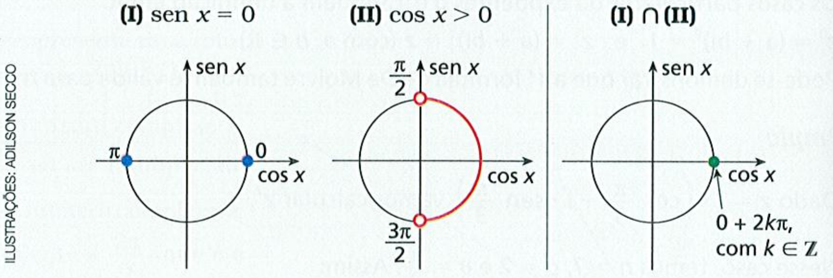
Assim: $1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4}\right)$

Agora, vamos obter w elevando 1 + i à potência n:

$$w = (1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \left[\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Para que w seja real positivo, devemos ter:

$$\begin{cases} \text{Im}(w) = \text{sen}\left(n \cdot \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \text{Re}(w) = \cos\left(n \cdot \dfrac{\pi}{4}\right) > 0 \end{cases}$$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Assim:

$$n \cdot \frac{\pi}{4} = 0 + 2k\pi \Rightarrow \frac{n}{4} = 2k \Rightarrow n = 8k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Logo: $n \in \{0, \pm 8, \pm 16, \pm 24, \ldots\}$

Reflita

Refaça o exercício **R19** para que w seja um número real negativo.

Para que w seja um número real negativo, temos:

$$n \cdot \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi$$

$$\frac{n}{4} = 1 + 2k$$

$n = 4 + 8k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Assim, temos os inteiros ±4, ±12, ±20, ... como solução.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução das questões **39**, **40**, **41** e **42** no Guia do professor.

38. Calcule:

a) $(1 - i)^5$ $-4 + 4i$ **b)** $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^8$ $-128 + 128\sqrt{3}i$

39. Sendo $z = 3 \cdot \left(\cos \dfrac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3}\right)$, calcule z^7.

40. Considere o número complexo $z = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Calcule n para que z seja:

a) um número real;

b) um número imaginário puro.

41. Determine todos os números complexos w, tais que $w^3 = \cos \pi + i \cdot \operatorname{sen} \pi$. Caso seja necessário, pode-se orientar os alunos a utilizar a fórmula: $w = \rho(\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$.

42. Siga os comandos e verifique: $(\bar{z})^n = (\overline{z^n})$

Considere o número complexo:

$$z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right)$$

a) Obtenha a expressão de z^n, com $n \in \mathbb{Z}$.

b) Determine a expressão do conjugado de z^n.

c) Calcule $\bar{z}$ e obtenha a expressão de $(\bar{z})^n$.

d) Compare as expressões obtidas nos itens **b** e **c**. Procure fazer uma demonstração para o caso geral.

5.3 Radiciação (2ª fórmula de De Moivre)

Considere um número complexo z, não nulo, e um número inteiro n, com $n > 1$.

Todo número complexo w tal que $w^n = z$ é chamado de raiz enésima de z.

As raízes enésimas de $z = \rho(\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$ podem ser obtidas pela fórmula:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

com $k = 0, 1, 2, 3..., (n - 1)$ e n natural, $n > 1$

Observação

Essa fórmula é conhecida como **2ª fórmula de De Moivre** e pode ser demonstrada a partir da expressão $w^n = z$, utilizando a 1ª fórmula de De Moivre vista anteriormente.

O índice k de w_k indica que z possui n raízes distintas, todas com mesmo módulo igual a $\sqrt[n]{\rho}$ e argumentos $\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$ (distintos entre si).

Exemplo

Vamos calcular as raízes quadradas complexas de $z = 2i$.

Temos que $z = 0 + 2i$. Vamos expressá-lo na forma trigonométrica:

$$\rho = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \quad \text{e} \quad \begin{cases} \operatorname{sen} \theta = \dfrac{2}{2} = 1 \\ \cos \theta = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Então: $z = 2 \cdot \left(\cos \dfrac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2}\right)$

Usando a 2ª fórmula de De Moivre, vamos achar os complexos w_k tais que $(w_k)^n = z$, sendo: $n = 2$, $k = 0, 1$ (raízes quadradas), $\rho = 2$ e $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

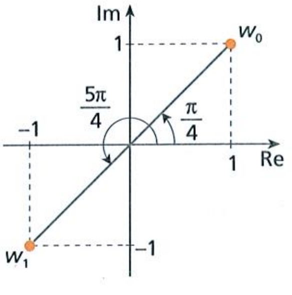
As duas raízes têm módulo igual a $\sqrt[n]{\rho}$, ou seja, $|w_0| = |w_1| = \sqrt{2}$.

- Para $k = 0$, temos: $\arg(w_0) = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$
- Para $k = 1$, temos: $\arg(w_1) = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{2} = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{2} = \dfrac{\frac{5\pi}{2}}{2} = \dfrac{5\pi}{4}$

Logo, as duas raízes quadradas complexas de $z = 2i$ são:

$$w_0 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

$$w_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i$$



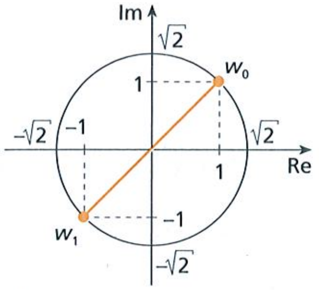
ADILSON SECCO

Podemos fazer a verificação elevando ao quadrado as raízes encontradas:

- $(1 + i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i = z$
- $(-1 - i)^2 = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) \cdot i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i = z$

Interpretação geométrica das raízes enésimas de um número complexo

Já vimos que as raízes quadradas de $z = 2i$ são $w_0 = 1 + i$ e $w_1 = -1 - i$. Nesse caso, essas raízes são afixos de pontos simétricos em relação à origem (são números complexos opostos). Esses pontos são as extremidades de um diâmetro da circunferência de centro na origem e raio igual a $\sqrt{2}$ (módulo das raízes). Note que esses pontos dividem a circunferência em dois arcos congruentes de π rad.



ADILSON SECCO

Podemos generalizar esse resultado para as n raízes de um número complexo $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$, pois, como todas as raízes têm mesmo módulo, elas são afixos de pontos localizados no plano à mesma distância da origem, o que caracteriza os pontos de uma circunferência.

Além disso, os argumentos dessas raízes, que são da forma $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$, constituem uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.

Assim, as raízes enésimas de z são os afixos de n pontos que dividem a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{\rho}$ em n arcos congruentes de $\frac{2\pi}{n}$ rad.

Reflita

As n raízes de um complexo z são os afixos dos n pontos de uma circunferência que a dividem em arcos congruentes.
Que figura formamos quando unimos ordenadamente esses n pontos, com $n \geqslant 3$?

Esses pontos são vértices de um polígono regular de n lados inscritos na circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{|z|}$.

Exercícios resolvidos

R20. Interpretar geometricamente as raízes cúbicas de $z = 8(\cos\pi + i \cdot \text{sen}\,\pi)$.

▸ *Resolução*

Para obter as raízes cúbicas de z, devemos achar os complexos w_k tais que $(w_k)^3 = z$. Expressando w_k na forma trigonométrica:

$w_k = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$

Pela 1ª fórmula de De Moivre, obtemos: $(w_k)^3 = \rho^3 \cdot (\cos 3\theta + i \cdot \text{sen}\,3\theta)$

Da igualdade $(w_k)^3 = z$, obtemos:

$\rho^3 \cdot (\cos 3\theta + i \cdot \text{sen}\,3\theta) = 8 \cdot (\cos\pi + i \cdot \text{sen}\,\pi)$

Daí, temos:

- $\rho^3 = 8 \Rightarrow \rho = \sqrt[3]{8} \Rightarrow \rho = 2$, pois $\rho \in \mathbb{R}_+^*$
- $\begin{cases} \cos 3\theta = \cos\pi = -1 \\ \text{sen}\,3\theta = \text{sen}\,\pi = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$, para $k = 0, 1, 2$

Então, as três raízes têm módulo igual a 2 e argumentos $\frac{\pi}{3}$, π e $\frac{5\pi}{3}$.

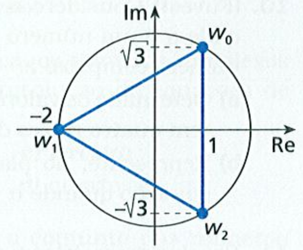
Note que esses argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\pi}{3}$ e razão $\frac{2\pi}{3}$. Assim, as raízes cúbicas de z são:

$w_0 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$, $w_1 = 2(\cos\pi + i \cdot \text{sen}\,\pi)$

$w_2 = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$, ou, ainda, na forma algébrica:

$w_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $w_1 = -2$ e $w_2 = 1 - i\sqrt{3}$

Representando as raízes w_0, w_1 e w_2 no plano complexo, observamos que elas são afixos dos vértices de um triângulo equilátero inscrito na circunferência de centro na origem e raio igual a 2.



ADILSON SECCO

Os vértices desse triângulo dividem a circunferência em três arcos congruentes de $\frac{2\pi}{3}$ rad.

Reflita

Observe ao lado os pontos que representam as raízes w_0, w_1 e w_2. Eles podem pertencer a um polígono regular circunscrito à circunferência?

Sim. Os pontos da circunferência também são os pontos médios dos lados do triângulo equilátero circunscrito à circunferência.

R21. Sabendo que $z_0 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$ é uma das raízes quadradas do número complexo w, determinar a outra raiz.

▸ ***Resolução***

Note que aqui não temos, de imediato, o número complexo w do qual estamos achando as raízes quadradas. Então, vamos usar o que sabemos geometricamente dessas raízes.

As raízes quadradas de w são os afixos das extremidades de um diâmetro da circunferência de centro na origem e raio igual a 2 (módulo das raízes). Esses pontos dividem a circunferência em dois arcos congruentes de π rad $\left(\frac{2\pi}{2}\right)$.

Assim, o argumento da outra raiz é $\frac{\pi}{3} + \pi$, ou seja, $\frac{4\pi}{3}$.

Logo, a outra raiz quadrada de w é $z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right)$.

Reflita

Determine a equação da circunferência citada no exercício **R21**.

A circunferência tem centro (0, 0) e raio 2; logo, a equação reduzida dessa circunferência é: $x^2 + y^2 = 4$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução das questões no Guia do professor.

43. Calcule as raízes quartas de $z = 1 + i$.

44. Obtenha as raízes cúbicas de:

a) $z = -2i$
b) $z = 81$
c) $z = 3i$
d) $z = -27$

45. Sabendo que $z_0 = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ é uma das raízes quadradas do número complexo w, determine a outra raiz.

46. O número complexo $w_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ é uma das raízes cúbicas de um número complexo z. Obtenha as demais raízes de z.

47. Interprete geometricamente:

a) as raízes cúbicas da unidade (1);
b) as raízes quartas da unidade imaginária (i);
c) as raízes oitavas de −1;
d) as raízes quintas de −i;
e) as raízes quadradas de $\frac{1}{i}$.

48. Considere o número complexo $z = i\sqrt{3}$.

a) Determine as raízes sextas de z.
b) Represente no plano complexo as raízes obtidas.
c) Determine a progressão aritmética formada pelos argumentos das raízes sextas de z.

49. Para determinar as raízes quadradas de $z = 16i$, devemos achar w tal que $w^2 = 16i$.

Fazendo $w = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, obtemos a equação: $(a + bi)^2 = 16i$

a) Escreva e resolva o sistema de equações que obtemos quando aplicamos a definição de igualdade de números complexos na equação obtida acima.
b) Quantos pares ordenados são solução desse sistema? O que isso indica?
c) Determine w na forma algébrica.
d) Calcule as raízes quadradas de z utilizando a 2ª fórmula de De Moivre.
e) Compare os resultados obtidos nos itens **c** e **d**. O que você observa?

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. Calcule o valor de x e $y \in \mathbb{R}$, de modo que:
$x + 1 + y(1 + 4x + 5i) + i(3x - 1) =$
$= 2i(1 + x) + 3y(i + x)$ $x = 5$ e $y = -1$ ou $x = -1$ e $y = 2$

2. Determine o valor de $x \in \mathbb{R}$ para que o número complexo $z = (x^2 - 5x + 6) + (x^2 - x - 2)i$ seja imaginário puro. 3

3. Determine x e $y \in \mathbb{R}$, de modo que:
$(x + yi) \cdot (2 + 3i) = 1 + 8i$ $x = 2$ e $y = 1$

4. Ache $a - b$ sabendo que os complexos a e b são tais que $a^2 - b^2 = 6$ e $\bar{a} + \bar{b} = 1 - i$. $3 - 3i$

Exercício resolvido

R22. Calcular o valor de $(1 + i)^2$ e $(1 + i)^{30}$.

▸ ***Resolução***

- $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
- $(1 + i)^{30} = [(1 + i)^2]^{15} =$
  $= (2i)^{15} =$
  $= 2^{15} \cdot i^{15} =$
  $= 2^{15} \cdot i^3 =$
  $= 2^{15} \cdot (-i) =$
  $= -2^{15} \cdot i$

5. Calcule o valor de:

a) $(1 - i) \cdot (1 + i)$ 2

b) $(1 - i)^{17} \cdot (1 + i)^{19}$ $2^{18}i$

6. Sendo $z = 3 - 3i$, calcule o recíproco (ou inverso) do conjugado de z. $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}i$

7. Considere $z = 2\sqrt{2}(1 - i)$.

a) Determine $|z|$ e arg(z). 4 e $\frac{7\pi}{4}$

b) Localize z no plano complexo. Qual é a imagem de z? Ver resolução no Guia do professor.

c) Expresse z e $\bar{z}$ na forma trigonométrica.

d) Calcule $(z - \bar{z})^3$. $128i\sqrt{2}$

8. Expresse $z = \left(\frac{-\sqrt{3} - i}{2}\right)^9 - \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{18}$ na forma algébrica. $z = 1 + i$

7. c) $z = 4\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

$\bar{z} = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

Aprofundamento

9. Calcule $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{15}$ para $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. zero

10. (Fuvest) Considere a equação $z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\bar{z}$, onde α é um número real e $\bar{z}$ indica o conjugado do número complexo z.

a) Determine os valores de α para os quais a equação tem quatro raízes distintas. $\alpha \leq \frac{3}{4}$ e $\alpha \neq \frac{1}{2}$

b) Represente, no plano complexo, as raízes dessa equação quando $\alpha = 0$. Ver resolução no Guia do professor.

11. Resolva geometricamente a inequação modular complexa $|z + 8| \leq 5$, com $z = x + yi$ e $x, y \in \mathbb{R}$.
Entre os pontos do lugar geométrico da solução da inequação dada, determine aquele que está mais próximo do ponto (5, 0). Ver resolução no Guia do professor.

12. (Vunesp) Considere os números complexos $z = 2 - i$ e $w = -3 - i$, sendo i a unidade imaginária.

a) Determine $z \cdot w$ e $|w - z|$. $-7 + i$ e 5

b) Represente z e w no plano complexo (Argand-Gauss) e determine $b \in \mathbb{R}$, com $b \geq 0$, de modo que os números complexos z, w e $t = bi$ sejam vértices de um triângulo, no plano complexo, cuja área é 20. Ver resolução no Guia do professor.

13. Represente no plano complexo o conjunto $A \cap B$, sendo $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (2 + 3i)| \leq 1\}$ e
$B = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + bi, \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } b \leq 3\}$.
Ver resolução no Guia do professor.

14. Resolva a equação $w^2 + |w| = 0$ no universo:

a) real $S = \{0\}$

b) complexo $S = \{0, i, -i\}$

15. Sabendo que $z = (x - 2i)^2$, com $x \in \mathbb{R}$, é um número complexo tal que arg(z) = 90°, determine o valor de $\frac{1}{z}$. $-\frac{1}{8}i$

16. Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $i \cdot z^2 = -\bar{z}$.
$z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ou $z = -i$ ou $z = 0$

17. Determine z e $w \in \mathbb{C}$ tal que: $\begin{cases} iz - 2w = 2 + 3i \\ -2z + 3iw = 1 + 4i \end{cases}$
$z = 1 - 2i$ e $w = -i$

18. Admita que o centro do plano complexo coincida com o centro de um relógio de ponteiros. Se o ponteiro dos minutos tem 2 unidades de comprimento, determine sobre que número complexo ele estará às 11 h 55 min. $z = -1 + i\sqrt{3}$

19. Se o vetor que representa $z = 2 + i$ sofrer uma rotação de 90° no sentido horário, vai se tornar a representação do número complexo w.
Determine w. $w = 1 - 2i$

Desafio

20. Sabendo que $z, w \in \mathbb{C}$ de modo que $|z| = 1$ e $z \neq w$, calcule: $\left|\frac{1 - \bar{z} \cdot w}{z - w}\right|$ 1

Autoavaliação

Leia atentamente as questões a seguir e responda-as em seu caderno.

1. Em sua origem histórica, os números complexos surgiram a partir da resolução de equações de _____ grau. alternativa c

a) primeiro
b) segundo
c) terceiro
d) quarto

2. Podemos afirmar que o conjunto dos números reais _____ conjunto dos complexos. Assim, $\sqrt{5}$ _____ $\mathbb{C}$, $\sqrt{5}$ _____ $\mathbb{R}$, $-8i \notin$ _____ e $-8i \in$ _____. alternativa d

a) está contido no; $\in$; $\notin$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$
b) contém o; $\in$; $\notin$; $\mathbb{C}$; $\mathbb{R}$
c) contém o; $\in$; $\in$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$
d) está contido no; $\in$; $\in$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$

3. As soluções de $x^2 + 64 = 0$ são _____ em $\mathbb{R}$ e _____ em _____. alternativa c

a) 32 e -32; inexistentes; $\mathbb{R}$
b) inexistentes; 32 e -32; $\mathbb{R}$
c) inexistentes; 8i e $-8i$; $\mathbb{C}$
d) 8 e -8; 8i e $-8i$; $\mathbb{C}$

4. Dados $z = 20 - 17i$ e $w = 9 + 20i$, temos que _____ é o resultado de $z + w$ e _____ é o resultado de $z - w$. alternativa d

a) $29 + 3i$; $11 + 37i$
b) $29 - 3i$; $11 - 37i$
c) $29 + 3i$; $11 + 37i$
d) $29 + 3i$; $11 - 37i$

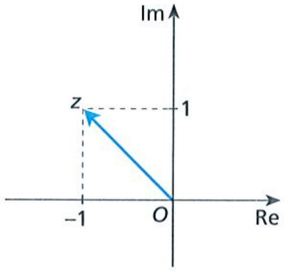
5. Dados $z = 2 - 3i$ e $w = 1 + 2i$, o resultado de $\frac{1}{z \cdot w}$ é _____. alternativa b

a) $\frac{8 - i}{8}$
b) $\frac{8 - i}{65}$
c) $\frac{8 + i}{64}$
d) $\frac{8 + i}{65}$

6. O _____ de um número complexo z é a distância da _____ do plano complexo à imagem de z nesse plano. alternativa a

a) módulo; origem
b) argumento; parte real
c) argumento; origem
d) módulo; raiz

7. Veja a representação de um número complexo no plano de Argand-Gauss.



ADILSON SECCO

Podemos escrever esse número na forma algébrica $z =$ _____ e seu argumento é _____. alternativa c

a) $-1 + i$; $\frac{\pi}{2}$
b) $1 + i$; π
c) $-1 + i$; $\frac{3\pi}{4}$
d) $-1 + i$; $-\pi$

8. A potência $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$ tem módulo _____ e argumento _____. alternativa b

a) 3; $\frac{\pi}{4}$
b) 81; π
c) 81; $\frac{\pi}{4}$
d) 27; π

9. O produto $(1 + i) \cdot i$ representa geometricamente uma _____ em relação a $(1 + i)$ de _____ graus. alternativa c

a) rotação; 45
b) translação; 90
c) rotação; 90
d) translação; 45

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Compreender o conjunto dos números complexos do ponto de vista histórico.	X								
Ampliar o conhecimento adquirido sobre os conjuntos numéricos.		X	X						
Operar algébrica e geometricamente com números complexos.				X	X	X	X	X	
Aplicar os números complexos em diversas áreas do conhecimento.									X
Páginas do livro referentes ao conceito	162 e 163	164 a 166	163 a 166	166 e 167	168 e 169	169 a 171	169 a 171	172 e 177	172 a 179

Resolução comentada

Números complexos

Problema

(PUC) Geometricamente, o módulo de um número complexo z é dado pela distância da origem O do plano complexo ao ponto de imagem de z. Assim, dado o complexo $z = 3 + 2i$, considere o triângulo ABO, cujos vértices A e B são os respectivos ponto imagem de z e $z \cdot i$. É verdade que esse triângulo é:

a) equilátero.

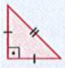
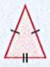
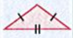
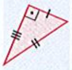
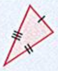
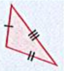
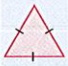
b) escaleno.

c) retângulo e isósceles.

d) retângulo e não isósceles.

e) isósceles e não retângulo.

Classificação de triângulos

	Retângulo	Acutângulo	Obtusângulo
Isósceles			
Escaleno			
Equilátero			

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Resolução

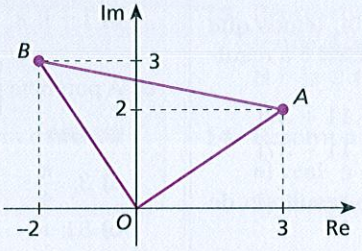
Para calcular as medidas de $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ do triângulo ABO temos de calcular $|z|$ e $|z \cdot i|$.

O módulo de z é: $|z| = d_{O,\,A} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Determinando $z \cdot i$, temos: $z \cdot i = (3 + 2i) \cdot i = 3i + 2i^2 = -2 + 3i$

O módulo de $z \cdot i$ é: $|zi| = d_{O,\,B} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

Como $|z| = |zi|$, concluímos que o triângulo ABO é isósceles. Para determinar se o triângulo ABO é equilátero, precisamos calcular a medida do terceiro lado, ou seja, a distância $\overline{AB}$.



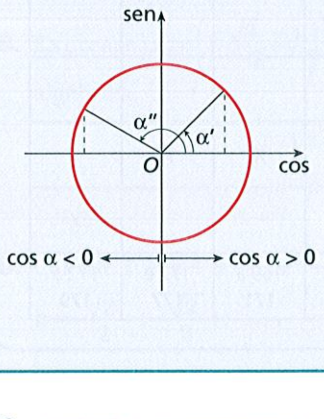
ADILSON SECCO

$$d_{A,\,B} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$
$$d_{A,\,B} = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (2 - 3)^2}$$
$$d_{A,\,B} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

Como $d_{A,O} = \sqrt{13}$, $d_{B,O} = \sqrt{13}$ e $d_{A,B} = \sqrt{26}$, o triângulo ABO é isósceles. Agora, precisamos determinar a medida dos ângulos internos desse triângulo. Apresentaremos duas formas: utilizando a lei dos cossenos e, depois, utilizando a forma trigonométrica de um número complexo.

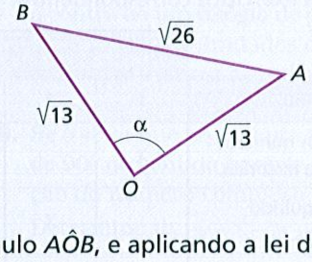
Se tivéssemos encontrado $\cos \alpha < 0$, concluiríamos que α é um ângulo obtuso e que o triângulo seria obtusângulo.

Se tivéssemos encontrado $\cos \alpha > 0$, concluiríamos que α é agudo e que o triângulo analisado seria acutângulo.



Utilizando a lei dos cossenos

Em qualquer triângulo, o maior ângulo interno se opõe ao maior lado; portanto, $A\hat{O}B$ é o maior ângulo do triângulo ABO.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Sendo α a medida do ângulo $A\hat{O}B$, e aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$\left(\sqrt{26}\right)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2 - 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

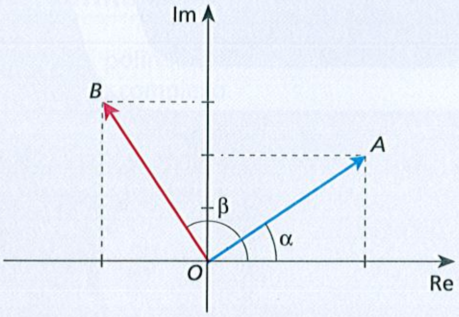
$$\Rightarrow \cancel{26} = \cancel{13} + \cancel{13} - 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 0$$

Como $\cos \alpha = 0$ e $0 < \alpha < 180°$, então $\alpha = 90°$ e o triângulo ABO é retângulo.

Assim, ABO é um triângulo isósceles retângulo.

Resposta: alternativa c

Utilizando a forma trigonométrica de um número complexo



ADILSON SECCO

Se $\overrightarrow{OA}$ é o vetor que representa o número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, e $\overrightarrow{OB}$ é o vetor que representa o número complexo $z \cdot i$, podemos afirmar que o menor ângulo formado entre esses vetores é 90°? sim

Observe que a medida do ângulo $A\hat{O}B$, que chamaremos de θ, é igual a $\beta - \alpha$.

Aplicando a fórmula trigonométrica do seno da diferença, temos:

$\text{sen}\,\theta = \text{sen}(\beta - \alpha) = \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha - \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta$ (I)

Do número complexo $z = 3 + 2i$, sabemos que $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{|z|}$ e $\cos\alpha = \dfrac{a}{|z|}$, ou seja:

como $a = 3$, $b = 2$ e $|z| = \sqrt{13}$

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ e $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ (II)

Do número complexo $z \cdot i = (-2 + 3i)$, sabemos que $\text{sen}\,\beta = \dfrac{b}{|z \cdot i|}$ e $\cos\beta = \dfrac{a}{|z \cdot i|}$, ou seja:

como $a = -2$, $b = 3$ e $|z \cdot i| = \sqrt{13}$

$\text{sen}\,\beta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ e $\cos\beta = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ (III)

Substituindo os valores de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\text{sen}\,\alpha$ e $\text{sen}\,\beta$ encontrados em (II) e (III), em (I), temos:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{9 + 4}{13} = 1$$

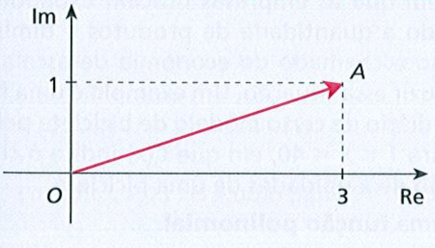
Como $\text{sen}\,\theta = 1$, concluímos que $\theta = 90°$ e que o triângulo ABO é retângulo.

Comparem as resoluções

Escolham uma das resoluções e escrevam no caderno um comentário sobre ela. Se vocês pensaram em uma forma diferente de resolver esse problema, elaborem a resolução no caderno e façam um comentário a respeito. resposta pessoal

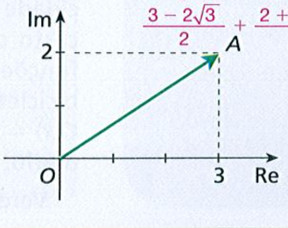
Variações do problema

1. Dado um número complexo $z = 3 + i$, classifiquem, quanto aos lados e ângulos, o triângulo ABO, cujos vértices A e B são os respectivos ponto imagem de z e do conjugado de z, e O é a origem do plano.
$\triangle ABO$ é isósceles e acutângulo.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2. Dado um número complexo $z = 3 + 2i$, cuja representação no plano de Argand-Gauss é o ponto A, determinem o número complexo cuja representação no plano é o vértice B do triângulo equilátero ABO (O é a origem do plano). $\dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2 - 3\sqrt{3}}{2}i$ ou $\dfrac{3 - 2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2 + 3\sqrt{3}}{2}i$



Capítulo

8

Polinômios e equações polinomiais

NELSON CHING/BLOOMBERG/GETTY IMAGES

Operário trabalhando na maior fábrica de bicicletas da China, 2012.

Objetivos do capítulo

- Trabalhar com polinômios de variável complexa.
- Determinar o grau e as raízes de um polinômio.
- Calcular o valor numérico de polinômios.
- Efetuar operações com polinômios.
- Aplicar métodos e teoremas para a divisão de polinômios.
- Resolver equações algébricas no universo complexo e estudar suas raízes.

1 Os polinômios

Na economia, há situações em que as empresas buscam expandir a capacidade de produção aumentando a quantidade de produtos e diminuindo o custo de cada um. Esse processo é chamado de economia de escala. Existem funções que são capazes de traduzir essa situação. Um exemplo é uma fábrica de bicicletas, que modelou o custo diário de certo modelo de bicicleta pela função $C(x) = 0{,}02x^3 + 50x + 4.000$, para $1 \leqslant x \leqslant 40$, em que $C(x)$ indica o custo total diário, em real, para a fabricação de x unidades de uma bicicleta.

Veremos a seguir que essa é uma **função polinomial**.

1.1 Função polinomial ou polinômio

Você já estudou funções polinomiais de domínio real. Agora vamos estudar essas funções para o domínio complexo.

Polinômio ou **função polinomial** na variável complexa x é toda função $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, para todo $x \in \mathbb{C}$, sendo $n \in \mathbb{N}$ e a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 números complexos.

Os números complexos a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1 e a_0 são os **coeficientes** do polinômio $P(x)$. Os monômios a_nx^n, $a_{n-1}x^{n-1}$, ..., a_1x e a_0 são os **termos** do polinômio, sendo a_0 o **termo independente**. Temos, também, que:

- um polinômio é **constante** se os coeficientes a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1 são iguais a zero.
- o polinômio **nulo**, ou **identicamente nulo**, é um caso particular de polinômio constante, no qual a_0 também é igual a zero.

Observação

Muitas vezes, para simplificar a notação, chamaremos um polinômio $P(x)$ apenas de polinômio P.

Exemplos

a) Os coeficientes de $P(x) = 5x^4 - 2x^3 + 2i \cdot x^2 + \sqrt{5}$ são: 5, −2, 2i e $\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$ é o termo independente.

b) No polinômio $Q(x) = -x^5 + 2x^3 - \frac{2}{5}i$ os termos em x^4, x^2 e x não aparecem.
Isso significa que os coeficientes desses termos são todos iguais a zero. Assim, $Q(x) = -x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 0x - \frac{2}{5}i$, e seus coeficientes são: $-1, 0, 2, 0, 0$ e $-\frac{2}{5}i$

c) $Q(x) = -13$ e $R(x) = 5i$ são polinômios constantes.

d) $R(x) = 0$ é um polinômio nulo.
Quando conveniente, pode ser expresso por:
$R(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + ... + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

Reflita

As funções a seguir não são polinômios:

- $P(x) = x^2 + x^{-2}$
- $P(x) = \frac{1}{x}$
- $P(x) = 2x^3 + \sqrt{2x}$
- $P(x) = \frac{x^2 + 4x - i}{x + 1}$

Por quê?

Para que $P(x)$ seja um polinômio, os termos a_nx^n devem ser tais que $n \in \mathbb{N}$. Nos três primeiros casos, há expoentes não naturais:

- $P(x) = x^2 + x^{-2}$, o expoente $-2 \notin \mathbb{N}$
- $P(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, o expoente $-1 \notin \mathbb{N}$
- $P(x) = 2x^3 + \sqrt{2x} = 2x^3 + 2^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$, o expoente $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

Em relação ao 4º caso, não é polinômio porque não é possível escrever $P(x)$ na forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, com $n \in \mathbb{N}$.

Exercício resolvido

R1. Calcular os valores dos números complexos a, b e c para que o polinômio $P(x) = ax^5 - (b + 3)x^4 + (c + 5i)x^3 + [(b - 2) \cdot i - c]x^2 + ai$ seja nulo.

▸ ***Resolução***

Para que $P(x)$ seja nulo, todos os seus coeficientes devem ser iguais a zero, então:

- $a = 0$
- $-(b + 3) = 0 \Rightarrow -b - 3 = 0 \Rightarrow b = -3$
- $c + 5i = 0 \Rightarrow c = -5i$
- $(b - 2) \cdot i - c = 0 \Rightarrow -5i - c = 0 \Rightarrow c = -5i$
- $ai = 0 \Rightarrow a = 0$

Portanto, $P(x)$ será nulo para $a = 0$, $b = -3$ e $c = -5i$.

1.2 Grau de um polinômio

Observação

Se $gr(P) = n$, dizemos que o polinômio $P(x)$ é do enésimo grau.

Considere $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ um polinômio não nulo. **Grau** de $P(x)$ é o maior expoente da variável x entre os termos com coeficiente diferente de zero.

Se $a_n \neq 0$, o grau de $P(x)$ é n. Indica-se: $gr(P) = n$

Se $P(x)$ é um polinômio constante e não nulo, seu grau é zero.

Não se define grau para polinômio nulo.

O coeficiente do termo que determina o grau de um polinômio é chamado de **coeficiente dominante**.

Exemplos

a) $P(x) = 5x^4 + 2i \cdot x^2$ tem grau 4.

b) $P(x) = -3i$ tem grau 0.

c) $P(x) = 0x^3 + 2x - 3$ tem grau 1.

d) $P(x) = 0$ não tem grau definido.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Dado $P(x) = (m + 2 - n)x^2 + (m + n - 3)x - 5m + p$, encontre os complexos m, n e p tal que o polinômio seja nulo. $m = \frac{1}{2}$ e $n = p = \frac{5}{2}$

2. Determine o valor de m para que o polinômio $P(x) = (2m - 10)x^5 + (m^2 - 25)x^4 + mx^3 - 2$ seja do 4º grau. $\nexists\, m \in \mathbb{C}$

3. Para quais valores de p e q o polinômio $F(x) = (p - 2q)x^3 + (2p + 3q - 1)x^2 - 2x + 1$ tem grau 1? $p = \frac{2}{7}$ e $q = \frac{1}{7}$

4. Discuta, em função dos valores de k, o grau de:

a) $G(x) = (k - 7)x^3 + (k^2 - 49)x^2 + 2x - 1$

b) $P(x) = (k + 3)x^4 + (k + 1)x^3 - (k - 1)x^2 - 5x + 4$

Ver resolução no Guia do professor.

1.3 Valor numérico e raiz de um polinômio

Dado um polinômio $P(x)$, quando substituímos a variável x por um número complexo z qualquer e efetuamos os cálculos indicados, obtemos $P(z)$, que é o **valor numérico** de $P(x)$ para $x = z$.

Quando $P(z) = 0$, dizemos que o número complexo z é **raiz** do polinômio $P(x)$.

Exemplos

a) Dado o polinômio $P(x) = -3x^3 - 5x^2 + 4x - 2$, vamos calcular $P(1)$.
Para tal, substituímos x por 1 na expressão que fornece $P(x)$.
$P(1) = -3 \cdot (1)^3 - 5 \cdot (1)^2 + 4 \cdot (1) - 2 = -3 - 5 + 4 - 2 = -6$
Note que $P(1)$ equivale à soma algébrica dos coeficientes de $P(x)$.

b) Vamos encontrar o valor de b em $P(x) = 2x^3 - bx^2 + x - 2$, para que $-2i$ seja raiz desse polinômio.
Para que $-2i$ seja raiz de $P(x)$, devemos ter $P(-2i) = 0$.
Assim, substituímos x por $-2i$ na expressão que fornece $P(x)$:
$P(-2i) = 2 \cdot (-2i)^3 - b(-2i)^2 + (-2i) - 2 = 0 \Rightarrow 14i - 2 + 4b = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4b = 2 - 14i \Rightarrow b = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$

Mais um exemplo

O valor numérico de $G(x) = x^4 - 2ix - 1 + i$ para $x = i$ é $2 + i$, pois:
$G(i) = i^4 - 2i \cdot i - 1 + i$
$G(i) = 1 + 2 - 1 + i$
$G(i) = 2 + i$

Exercícios resolvidos

R2. Determinar o polinômio $P(x)$ do 1º grau para que $P(8) = 13$ e $P(2) = 1$.

▸ ***Resolução***

Se $P(x)$ é um polinômio do 1º grau, ele é do tipo $P(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.

- $P(8) = 13 \Rightarrow a \cdot (8) + b = 13 \Rightarrow 8a + b = 13$
- $P(2) = 1 \Rightarrow a \cdot (2) + b = 1 \Rightarrow 2a + b = 1$

Assim, obtemos o sistema: $\begin{cases} 8a + b = 13 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 2$ e $b = -3$.

Logo, $P(x) = 2x - 3$.

R3. Sendo $P(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, calcular a e b, sabendo que 2 e -1 são raízes de P e que $P(0) = -2$.

▶ ***Resolução***

Como $P(0) = -2$, temos: $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -2 \Rightarrow c = -2$

Sendo 2 e -1 raízes de P, temos: $P(2) = P(-1) = 0$. Assim:

- $a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + c = 0 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0$
- $a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$

Substituindo c por -2 nas equações, obtemos o sistema: $\begin{cases} 4a + 2b = 2 \\ a - b = 2 \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = 1$ e $b = -1$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

5. Dado $P(x) = 2x^4 + bx^3 - x^2 + 3$, calcule o valor de b para que $P(1) = 2\text{i}$. $b = -4 + 2\text{i}$

6. Sendo $P(x)$ um polinômio do 2º grau tal que $P(-3) = 6$, $P(0) = 2$ e $P(2) = 1$, determine esse polinômio. $P(x) = \frac{x^2}{6} - \frac{5x}{6} + 2$

7. Encontre c para que 3 seja raiz de $P(x) = -x^3 + 2x^2 - cx + 1$. $c = -\frac{8}{3}$

8. Seja $P(x) = x^4 - (2a - 1)x^3 + (b - 3)x^2 - 3x$ um polinômio de raízes 2 e -1. Determine a e b.
$a = \frac{1}{4}$ e $b = -\frac{1}{2}$

9. Sabendo que $P(-2) = -10$ e que -1 é raiz de $P(x) = x^3 + 8x^2 - cx + d$, encontre c e d.
$c = -27$ e $d = 20$

10. Se i é raiz de $P(x) = px^3 + (q - 3)x^2 - 2px - 1$, encontre p e q, sabendo que $P(1) = -\text{i}$.

10. $p = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}\text{i}$ e $q = \frac{41}{10} - \frac{3}{10}\text{i}$

1.4 Igualdade de polinômios

Dois polinômios, P e Q, na variável complexa x, são **iguais** (ou **idênticos**) quando assumem valores numéricos iguais para qualquer valor comum atribuído à variável.

Assim: $P = Q \Leftrightarrow P(x) = Q(x)$, para $\forall\, x \in \mathbb{C}$

Reflita

Dois polinômios de graus diferentes podem ser iguais? Por quê?

Não. Dois polinômios de graus diferentes podem até apresentar valores numéricos iguais para determinados valores da variável x, porém **nunca para quaisquer valores de x**. Isso é uma consequência direta da definição de igualdade entre polinômios.

Para que dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ sejam iguais, é necessário e suficiente que os coeficientes de termos semelhantes de $P(x)$ e $Q(x)$ sejam iguais.

Exemplo

Para que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $Q(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ sejam iguais, devemos ter: $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$ e $d = 1$

Reflita

Dois polinômios de mesmo grau que apresentam raízes iguais podem ser polinômios diferentes? Justifique.

Sim, por exemplo, $P(x) = x + 1$ e $Q(x) = 2x + 2$. Apesar de $P(-1) = Q(-1) = 0$, não podemos dizer que $P(x)$ e $Q(x)$ sejam iguais.

Exercícios resolvidos

R4. Obter os valores de a, b, c, d, e, f, tal que os polinômios $P(x) = -x^5 + 2x^3 + (d + 2)x^2 - \text{i} \cdot x + 2$ e $Q(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 - x^2 + ex + f$ sejam iguais.

▶ ***Resolução***

Os polinômios P e Q serão iguais se os coeficientes dos termos de mesmo grau forem iguais.

- $a = -1$
- $b = 0$
- $c = 2$
- $-1 = d + 2 \Rightarrow d = -3$
- $e = -\text{i}$
- $f = 2$

Logo: $a = -1$, $b = 0$, $c = 2$, $d = -3$, $e = -\text{i}$ e $f = 2$

R5. Obter p, q e r para que o polinômio $F(x) = (p + q)x^2 + (p - q)x + p + q - 2r$ e $H(x) = 5x - 6$ sejam idênticos.

▶ ***Resolução***

Para que $F(x) = H(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{C}$, devemos ter:

$p + q = 0$, $p - q = 5$ e $p + q - 2r = -6$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} p + q = 0 \\ p - q = 5 \end{cases}$, obtemos:

$p = \frac{5}{2}$ e $q = -\frac{5}{2}$

Substituindo os valores de p e q em $p + q - 2r = -6$, temos:

$$p + q - 2r = -6 \Rightarrow \frac{5}{2} - \frac{5}{2} - 2r = -6 \Rightarrow r = 3$$

Portanto: $p = \frac{5}{2}$, $q = -\frac{5}{2}$ e $r = 3$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

11. Para que valores de a, b e c se verifica a igualdade:

$$(2a + b)x^3 + (a - b)x^2 + (b + c)x + \frac{c}{2} - 3 = 4x^3 - 10x^2 + 2x - 6$$

$a = -2$, $b = 8$ e $c = -6$

12. Determine os valores de a, b, c e d para que os polinômios P e Q sejam iguais, sendo:

$a = \frac{7}{3}$, $b = 6$, $c = 3$ e $d = 1$

$P(x) = (a + 3)x^2 + cx + 3$ e $Q(x) = (b - 6)x^3 + (4a - 4)x^2 + 3x + d + 2$

13. Para que valores de a, b e c o polinômio

$a = -3$
$b = c = -4$

$P(x) = (2a - b + 2)x^2 + (b - c)x + c - a + 1 = 0$ é idêntico ao polinômio nulo?

2 Operações entre polinômios

Você já estudou, nos anos anteriores, algumas operações entre polinômios. As regras aprendidas anteriormente continuam válidas. Agora, vamos retomar este estudo.

2.1 Adição e subtração de polinômios

Dados dois polinômios, $P(x)$ e $Q(x)$, obtemos:

- a soma dos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ adicionando os coeficientes dos termos semelhantes de $P(x)$ e $Q(x)$;
- a diferença entre os polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ fazendo a adição do primeiro polinômio com o oposto do segundo, ou seja, $P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$.

Observação

O **oposto** de um polinômio P é o polinômio que, somado com P, resulta no polinômio nulo.

Exemplos

Adição	Subtração
Dados $P(x) = 7x^3 - 2x^2 - 8x + 3$ e $F(x) = 3x^3 + 12x + 6$, obter o polinômio $A = P + F$. $A(x) = (7x^3 - 2x^2 - 8x + 3) + (3x^3 + 12x + 6)$ $A(x) = 7x^3 - 2x^2 - 8x + 3 + 3x^3 + 12x + 6$ $A(x) = 10x^3 - 2x^2 + 4x + 9$	Dados $P(x) = 3x^4 + x^3 - \mathrm{i} \cdot x^2 - \sqrt{2}x + 1$ e $Q(x) = -x^4 + 2x^3 + x$, obter o polinômio $B = P - Q$. $B(x) = \left(3x^4 + x^3 - \mathrm{i}x^2 - \sqrt{2}x + 1\right) + \left[-(-x^4 + 2x^3 + x)\right]$ $B(x) = 3x^4 + x^3 - \mathrm{i}x^2 - \sqrt{2}x + 1 + x^4 - 2x^3 - x$ $B(x) = 4x^4 - x^3 - \mathrm{i}x^2 + \left(-\sqrt{2} - 1\right)x + 1$

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios de graus m e n, respectivamente, com $m \geqslant n$.

- Se $m \neq n$: $\mathrm{gr}(P + Q) = \mathrm{gr}(P - Q) = m$;
- Se $m = n$: $\mathrm{gr}(P + Q) \leqslant m$ e $\mathrm{gr}(P - Q) \leqslant m$ ou o polinômio resultante é nulo.

2.2 Multiplicação de polinômios

O produto de dois polinômios, $P(x)$ e $Q(x)$, é obtido multiplicando-se cada termo de $P(x)$ por todos os termos de $Q(x)$ e reduzindo-se os termos semelhantes.

Se dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ não nulos têm graus m e n, então: $\mathrm{gr}(PQ) = m + n$

Exemplos

Sejam $A(x) = x^2 + 2x$ e $B(x) = x + 4$, vamos obter:

a) $C(x) = A(x) \cdot B(x)$
$C(x) = (x^2 + 2x) \cdot (x + 4)$
$C(x) = x^3 + 4x^2 + 2x^2 + 8x$
$C(x) = x^3 + 6x^2 + 8x$

b) $D(x) = [A(x)]^3 = A(x) \cdot A(x) \cdot A(x)$
$D(x) = (x^2 + 2x) \cdot (x^2 + 2x) \cdot (x^2 + 2x)$
$D(x) = (x^4 + 4x^3 + 4x^2) \cdot (x^2 + 2x)$
$D(x) = x^6 + 2x^5 + 4x^5 + 8x^4 + 4x^4 + 8x^3$
$D(x) = x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 8x^3$

Exercício resolvido

R6. Dados $F(x) = x^2 + 2x + i$ e $G(x) = -x^2 - x + 3$, obter o polinômio $A(x) = F(x) \cdot G(x)$.

▸ ***Resolução***

$A(x) = (x^2 + 2x + i) \cdot (-x^2 - x + 3) \Rightarrow A(x) = -x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - ix^2 - ix + 3i$

Portanto: $A(x) = -x^4 - 3x^3 + (1 - i)x^2 + (6 - i)x + 3i$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

14. Dados os polinômios $F(x) = -3x^3 + 2x^2 + 2i$ e $G(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, determine:

a) $F(x) + G(x)$ $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + 1 + 2i$

b) $F(x) - G(x)$ $-x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1 + 2i$

c) $F(x) \cdot G(x)$

d) $F(x) \cdot F(x)$ $9x^6 - 12x^5 + 4x^4 - 12ix^3 + 8ix^2 - 4$

15. Sendo $F(x) = x - i$ e $P(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + 2x$, calcule os valores de a, b, c e d para que:
$F(x) \cdot P(x) = ax^6 + (2 - i)x^5 + 2bx^4 - x^3 - cx^2 + \frac{d}{2}x$
$a = 1$, $b = -i$, $c = -2 - i$ e $d = -4i$

16. Sendo:
$P(x) = x^3 - 2x$ e $Q(x) = 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 3x - 2$,
calcule: $[P(x)]^2 - Q(x)$. $x^6 - 6x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 3x + 2$

14. c) $-3x^7 + 5x^6 - 5x^5 + (5 + 2i)x^4 - (5 + 2i)x^3 + (2 + 2i)x^2 - 2ix + 2i$

2.3 Divisão de polinômios

Considere dois polinômios $P(x)$ e $D(x)$, com $D(x)$ não nulo. Dividir $P(x)$, que é o dividendo, por $D(x)$, que é o divisor, significa determinar os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, quociente e resto, respectivamente, que satisfazem as duas condições:

- $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$
- $\text{gr}(R) < \text{gr}(D)$ ou $R(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$.

É possível demonstrar que existe um único quociente $Q(x)$ e um único resto $R(x)$.

Note que $\text{gr}(Q) = \text{gr}(P) - \text{gr}(D)$ e que o maior grau possível para $R(x)$ é $\text{gr}(D) - 1$.

Quando $\boldsymbol{R(x) = 0}$, dizemos que o polinômio $P(x)$ **é divisível** pelo polinômio $D(x)$ ou, ainda, que a divisão de $P(x)$ por $D(x)$ **é exata**. Nesse caso, temos: $P(x) = Q(x) \cdot D(x)$

Reflita

Determine o quociente e o resto da divisão em cada caso.

a) O dividendo é o polinômio nulo. $Q(x) = 0$ e $R(x) = 0$

b) O grau do polinômio dividendo é diferente de zero e menor que o grau do polinômio divisor.
$Q(x) = 0$ e $R(x)$ é o próprio dividendo.

■ Método da chave

Para efetuar a divisão de dois polinômios, podemos aplicar a mesma ideia da divisão de dois números naturais, usando o método da chave.

Exemplo

Veja, passo a passo, a divisão de $P(x) = 8x^3 + 4x^2 + 1$ por $D(x) = 4x^2 + 1$.

Escrevemos ordenadamente dividendo e divisor segundo as potências decrescentes de x, completando-os, se necessário, com termos de coeficiente zero.	$\begin{array}{r\|l} 8x^3 + 4x^2 + 0x + 1 & 4x^2 + 0x + 1 \\ \cline{2-2} \end{array}$
Dividimos o termo de maior grau de P pelo termo de maior grau de D ($8x^3 : 4x^2$), obtendo o primeiro termo de Q, que é $2x$.	$\begin{array}{r\|l} 8x^3 + 4x^2 + 0x + 1 & 4x^2 + 0x + 1 \\ \cline{2-2} & 2x \end{array}$
Multiplicamos o termo encontrado pelo divisor e subtraímos do dividendo o resultado obtido ($8x^3 + 2x$), chegando ao resto parcial ($4x^2 - 2x + 1$).	$\begin{array}{r\|l} 8x^3 + 4x^2 + 0x + 1 & 4x^2 + 0x + 1 \\ \cline{2-2} -(8x^3 + 0x^2 + 2x) & 2x \\ \cline{1-1} 4x^2 - 2x + 1 & \end{array}$
Dividimos o termo de maior grau do resto parcial pelo termo de maior grau do divisor ($4x^2 : 4x^2$), obtendo o próximo termo do quociente (1). Repetimos o passo anterior para obter um novo resto parcial.	$\begin{array}{r\|l} 8x^3 + 4x^2 + 0x + 1 & 4x^2 + 0x + 1 \\ \cline{2-2} -(8x^3 + 0x^2 + 2x) & 2x + 1 \\ \cline{1-1} 4x^2 - 2x + 1 & \\ -(4x^2 + 0x + 1) & \\ \cline{1-1} -2x & \end{array}$
A divisão termina quando o grau do resto é menor que o grau do divisor (nesse caso, menor que 2) ou quando obtemos resto zero.	$8x^3 + 4x^2 + 1 = (2x + 1)(4x^2 + 1) - 2x$ $Q(x) = 2x + 1$ e $R(x) = -2x$

Método dos coeficientes a determinar (ou método de Descartes)

Esse método consiste em obter os coeficientes dos polinômios quociente e divisor a partir da relação: $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$

Exemplo

Vamos obter o quociente e o resto da divisão de $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 2x + 5$ por $D(x) = 3x^2 - 5x + 3$ pelo método de Descartes.

Observe que $\text{gr}(Q) = \text{gr}(P) - \text{gr}(D) = 1$. Assim, $Q(x)$ é um polinômio do 1º grau: $Q(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Quanto ao resto, ou ele é o polinômio nulo ou seu grau não pode exceder a 1 (o grau do divisor é 2). Logo, $R(x) = cx + d$.

Como $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$, vem:

$$6x^3 - 7x^2 + 2x + 5 = (ax + b) \cdot (3x^2 - 5x + 3) + (cx + d)$$

$$6x^3 - 7x^2 + 2x + 5 = 3ax^3 - 5ax^2 + 3ax + 3bx^2 - 5bx + 3b + cx + d$$

$$6x^3 - 7x^2 + 2x + 5 = 3ax^3 + (-5a + 3b)x^2 + (3a - 5b + c)x + 3b + d$$

Fazendo a correspondência entre os coeficientes dos polinômios, obtemos:

- $6 = 3a \Rightarrow a = 2$
- $-7 = -5a + 3b \Rightarrow b = 1$
- $2 = 3a - 5b + c \Rightarrow c = 1$
- $5 = 3b + d \Rightarrow d = 2$

Como $Q(x) = ax + b$ e $R(x) = cx + d$, temos $Q(x) = 2x + 1$ e $R(x) = x + 2$.

Reflita

Quando assumimos $R(x) = cx + d$ no exemplo dado, por que não colocamos a condição $c \neq 0$?

Sabemos que $\text{gr}(R)$ é no máximo igual a 1. No entanto, não podemos afirmar *a priori* que ele é igual a 1, o que estaria sendo imposto pela condição $c \neq 0$.

Exercícios resolvidos

R7. Dividir $P(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ por $D(x) = x + 2$ pelo método da chave.

▸ ***Resolução***

- Aplicando o método da chave, obtemos:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 3x^2 + 5x + 6 & x + 2 \\ \cline{2-2}
-(x^3 + 2x^2) & x^2 + x + 3 \\ \cline{1-1}
x^2 + 5x + 6 & \\
-(x^2 + 2x) & \\ \cline{1-1}
3x + 6 & \\
-(3x + 6) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

- Para fazer a verificação, vamos utilizar a relação:

$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$

$Q(x) \cdot D(x) = (x^2 + x + 3) \cdot (x + 2) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6 = P(x)$

Como $Q(x) \cdot D(x) = P(x)$, temos $R(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{C}$.

Portanto: $Q(x) = x^2 + x + 3$ e $R(x) = 0$

R8. Encontrar m e n para que $5ix^3 - x^2 - mx + n$ seja divisível por $x^2 - x - i$.

▸ ***Resolução***

- Como o dividendo é do 3º grau e o divisor é do 2º grau, o quociente é um polinômio do 1º grau, ou seja, $Q(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.
- Para a divisão ser exata, o resto deve ser o polinômio nulo. Então:

$$5ix^3 - x^2 - mx + n = (ax + b)(x^2 - x - i)$$

$$5ix^3 - x^2 - mx + n = ax^3 + (-a + b)x^2 + (-ai - b)x - bi$$

Assim:

- $5i = a$
- $-1 = -a + b \Rightarrow b = -1 + 5i$
- $-m = -ai - b \Rightarrow m = (5i) \cdot i + (-1 + 5i) \Rightarrow m = -6 + 5i$
- $n = -bi \Rightarrow n = -(-1 + 5i) \cdot i \Rightarrow n = 5 + i$

Portanto: $m = -6 + 5i$ e $n = 5 + i$

Reflita

Resolva o exercício **R8** pelo método da chave.

Ver resolução no Guia do professor.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

17. Encontre o dividendo de uma divisão de polinômios em que o resto é $3x + 2$, o divisor é $3x^2 - x$ e o quociente é $2x - 1$. $6x^3 - 5x^2 + 4x + 2$

18. Sejam $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ por $x^3 - x^2 + 1$. Obtenha o resto da divisão de $R(x)$ por $Q(x)$. $\frac{1}{2}$

19. Determine a e b para que $-x^3 + 2x^2 - ax + 2b$ seja divisível por $x^2 - x + 1$. $a = 2$ e $b = \frac{1}{2}$

20. Divida $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 3x - 6$ por $H(x) = x - 2$.

a) Qual é o resto dessa divisão? -20

b) Calcule $P(2)$. -20

- Compare o valor de $P(2)$ com o resto da divisão. O que você observou? $P(2) = R(x)$

2.4 Divisão por binômios do tipo $(x - a)$

A divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio do 1º grau do tipo $B(x) = x - a$ é um caso que merece destaque por sua aplicação em equações algébricas.

Note que o número a é a raiz do binômio $B(x) = x - a$, pois $B(a) = 0$.

Como o binômio $(x - a)$ tem grau 1, o resto de qualquer divisão de um polinômio $P(x)$, com $gr(P) \geqslant 1$, por esse binômio é um polinômio constante (grau zero ou polinômio nulo); por isso indicaremos apenas por R.

Reflita

Expresse o binômio $x + 5$ na forma $x - a$. $x + 5 = x - (-5)$

Exemplo

Vamos efetuar a divisão de $P(x) = -3x^3 + 2x + 1$ por $(x - 5)$ e calcular $P(5)$.

- Aplicando o método da chave, temos:

$$\begin{array}{r|l}
-3x^3 + 0x^2 + 2x + 1 & x - 5 \\ \cline{2-2}
-(-3x^3 + 15x^2) & -3x^2 - 15x - 73 \\ \cline{1-1}
-15x^2 + 2x + 1 & \\
-(-15x^2 + 75x) & \\ \cline{1-1}
-73x + 1 & \\
-(-73x + 365) & \\ \cline{1-1}
-364 &
\end{array}$$

- Cálculo de $P(5)$:

$P(5) = -3 \cdot (5)^3 + 2 \cdot (5) + 1$

$P(5) = -375 + 10 + 1$

$P(5) = -364$

O valor obtido para $P(5)$ é igual ao resto da divisão de $P(x)$ pelo binômio $(x - 5)$.

▪ Teorema do resto

Dado um polinômio $P(x)$ com grau igual a 1 ou maior que 1, o resto da divisão de $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$.

Demonstração

Na divisão de $P(x)$ por $(x - a)$, temos: $P(x) = Q(x) \cdot (x - a) + R$, com $R \in \mathbb{C}$, $\forall\, x \in \mathbb{C}$

Substituindo x por a, temos: $P(a) = Q(a) \cdot (a - a) + R \Rightarrow P(a) = 0 + R \Rightarrow P(a) = R$

Exercícios resolvidos

R9. Obter o resto da divisão de $P(x) = -4x^4 + x^2 - ix$ por $(x - i)$ sem efetuar a divisão.

▸ ***Resolução***

Pelo teorema do resto, sabemos que $P(i)$ é o resto R dessa divisão. Então: $P(i) = -4 \cdot i^4 + i^2 - i \cdot i$, ou seja, $P(i) = -4$. Logo, o resto da divisão é $R = -4$.

Reflita

Efetue a divisão de $P(x) = -4x^4 + x^2 - ix$ por $(x - i)$ pelo método da chave e verifique que o resto é igual a $P(i)$.

Ver resolução no Guia do professor.

R10. Encontrar o resto da divisão de $F(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 2$ por $x + 3$.

▸ ***Resolução***

Vamos expressar $x + 3$ na forma $x - a$ e aplicar o teorema do resto.

Para obter o resto da divisão, devemos encontrar $F(-3)$, pois $a = -3$.

Então, $F(-3) = (-3)^3 + 5 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 2 = 10$; o resto da divisão é 10.

Observação

Note: $x + 3 = x - (-3)$

Nesse caso, $a = -3$.

Teorema de D'Alembert

Um polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - a)$ se, e somente se, a é raiz de $P(x)$, isto é, $P(a) = 0$.

Demonstração

Pelo teorema do resto, temos que $P(a) = R$ é o resto da divisão de $P(x)$ por $x - a$. $P(x)$ é divisível por $(x - a) \Leftrightarrow R = 0$; pelo teorema do resto $P(a) = 0 \Leftrightarrow a$ é raiz de $P(x)$

Exemplos

a) O polinômio $P(x) = x^2 - 4$ é divisível por $x - 2$, pois $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Note que 2 é raiz de P, pois $P(2) = 2^2 - 4 = 0$.

b) Como -3 é raiz de $P(x) = x^2 + 3x$, pois $P(-3) = (-3)^2 + 3 \cdot (-3) = 0$, pelo teorema de D'Alembert sabemos que $P(x)$ é divisível por $x + 3$.

Exercícios resolvidos

R11. Obter o quociente e o resto da divisão de $P(x) = x^2 + 5x + 12$ por $D(x) = 3x - 12$.

▸ *Resolução*

Devemos procurar $Q(x)$ e $R(x)$ tal que $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$, ou seja:

$x^2 + 5x + 12 = Q(x) \cdot (3x - 12) + R(x)$

Note que: $3x - 12 = 3 \cdot (x - 4)$. Assim:

$$x^2 + 5x + 12 = \overbrace{Q(x) \cdot 3}^{Q_1(x)} \cdot (x - 4) + R(x)$$

$$x^2 + 5x + 12 = Q_1(x) \cdot (x - 4) + R(x)$$

Agora, basta dividir $P(x)$ por $(x - 4)$ e o quociente $Q_1(x)$ por 3 para obter o quociente $Q(x)$ procurado. O resto permanece o mesmo.

$$\begin{array}{rl}
x^2 + 5x + 12 & \underline{|\ x - 4\quad} \\
\underline{-(x^2 - 4x)\quad} & x + 9 \\
9x + 12 & \\
\underline{-(9x - 36)} & \\
48 &
\end{array}$$

Obtemos, assim: $Q_1(x) = x + 9$ e $R(x) = 48$

Então: $Q(x) = \dfrac{1}{3}x + 3$ e $R(x) = 48$

R12. Determinar c para que $P(x) = x^3 + 2x^2 - c$ seja divisível por:

a) $x + \dfrac{1}{3}$ **b)** x

▸ *Resolução*

a) Temos: $x + \dfrac{1}{3} = x - \left(-\dfrac{1}{3}\right)$

Se P é divisível por $x + \dfrac{1}{3}$, pelo teorema de D'Alembert, temos: $P\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 0$

$$-\frac{1}{27} + \frac{2}{9} - c = 0 \Rightarrow c = \frac{5}{27}$$

Logo, se $P(x)$ é divisível por $x + \dfrac{1}{3}$, o valor de c é $\dfrac{5}{27}$.

b) Temos: $x = x - 0$

Se P é divisível por x, pelo teorema de D'Alembert, temos:

$P(0) = 0 \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 - c = 0 \Rightarrow c = 0$

Portanto, se $P(x)$ é divisível por x, o valor de c é zero.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

21. Encontre o resto da divisão do polinômio $x^5 - 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ por:

a) $x - 1$ 4 **b)** $x + 1$ 8 **c)** $2x + 2$ 8 **d)** $x - i$ 0

22. Determine m para que o resto da divisão de $x^3 + 2mx^2 - 5x$ por $x - 4$ seja 2. $-\dfrac{21}{16}$

23. Encontre k de modo que $-x^4 - x^3 + kx - 1$ seja divisível por $x + 2$. $-\dfrac{9}{2}$

24. Determine a e b de modo que $F(x) = ax^3 + bx - 4$ e $H(x) = x^2 - bx + 2$ sejam divisíveis por $x - i$. $a = 3i$ e $b = -i$

25. Calcule o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ para n natural e, depois, justifique cada item:

a) $P(x) = x^{2n} + 3$ 4

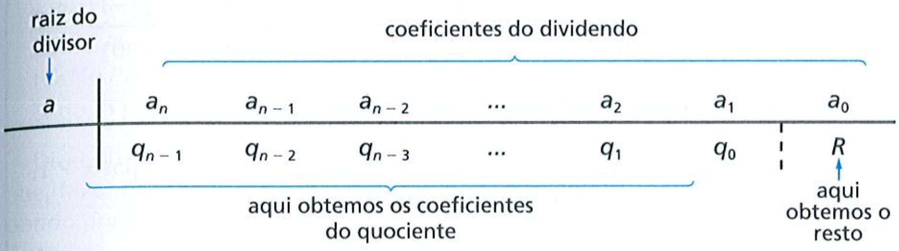
b) $P(x) = x^{2n + 1} + 3$ 2

2.5 Dispositivo de Briot-Ruffini

Você já trabalhou com a divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio da forma $(x - a)$ aplicando o método da chave e o método dos coeficientes a determinar (ou método de Descartes). Agora, vamos estudar um método que permite determinar o quociente e o resto desse tipo de divisão de maneira mais simples e rápida, chamado de **dispositivo de Briot-Ruffini**.

Esse método utiliza apenas os coeficientes do dividendo $P(x)$ com $\text{gr}(P) \geqslant 1$, e o valor de a, que é a raiz do divisor $(x - a)$.

Observe como devem ser arranjados os coeficientes nesse dispositivo:


raiz do divisor
coeficientes do dividendo
a
a_n
a_{n-1}
a_{n-2}
$\cdots$
a_2
a_1
a_0
q_{n-1}
q_{n-2}
q_{n-3}
$\cdots$
q_1
q_0
R
aqui obtemos os coeficientes do quociente
aqui obtemos o resto

Observação

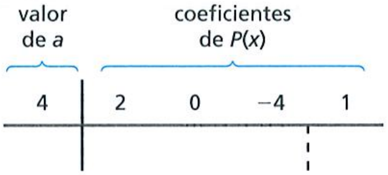
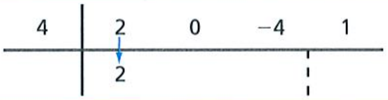
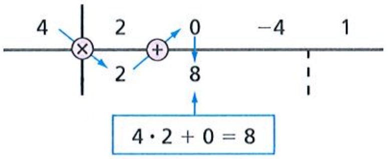
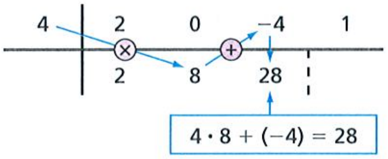
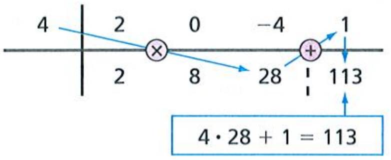
O polinômio $P(x)$ deve estar ordenado segundo as potências decrescentes de x e expresso na sua forma completa, isto é, com todos os termos (mesmo aqueles que têm coeficiente zero).

Exemplo

Vamos determinar o quociente e o resto da divisão de $P(x) = 2x^3 - 4x + 1$ por $x - 4$ utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini.

Para isso, escreveremos o polinômio dividendo da seguinte forma:

$P(x) = 2x^3 + 0x^2 - 4x + 1$

Dispomos os valores que participam do cálculo para montar o dispositivo.	 valor de a coeficientes de $P(x)$ 4 2 0 −4 1
Repetimos o coeficiente dominante do dividendo $P(x)$ na linha de baixo.	
Multiplicamos o valor de a por esse coeficiente e somamos o produto obtido com o próximo coeficiente de $P(x)$, colocando o resultado abaixo desse coeficiente.	 4 2 0 −4 1 2 8 $4 \cdot 2 + 0 = 8$
Multiplicamos o valor de a pelo resultado que acabamos de obter, somamos o produto com o próximo coeficiente de $P(x)$ e colocamos esse novo resultado abaixo desse coeficiente.	 4 2 0 −4 1 2 8 28 $4 \cdot 8 + (-4) = 28$
Repetimos o processo até o último coeficiente de $P(x)$, que está separado, à direita. O último resultado é o resto da divisão, e os demais números obtidos são os coeficientes do quociente, dispostos ordenadamente segundo as potências decrescentes de x.	 4 2 0 −4 1 2 8 28 113 $4 \cdot 28 + 1 = 113$

Assim, encontramos o quociente $Q(x) = 2x^2 + 8x + 28$ e o resto $R(x) = 113$.

Observação

Veja que $\text{gr}(Q) = \text{gr}(P) - 1$, uma vez que o grau do divisor $(x - a)$ é 1.

Reflita

Qual a vantagem de calcular o valor numérico utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini?

Ver resolução no Guia do professor.

Exercícios resolvidos

R13. Obter o valor numérico de $P(x) = -3x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 1$ para $x = 5$, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini.

▶ ***Resolução***

O resto da divisão de $P(x)$ por $x - 5$ é $P(5)$, pelo teorema do resto, que é o valor numérico de $P(x)$ para $x = 5$. Vamos aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini a $P(x) = -3x^5 + 2x^4 - 1x^3 + 2x^2 + 0x - 1$ (forma completa). Assim, temos:

$$\begin{array}{c|ccccc:c} 5 & -3 & 2 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ \hline & -3 & -13 & -66 & -328 & -1.640 & -8.201 \end{array}$$

Portanto, $P(5) = -8.201$.

R14. Determinar o resto da divisão de $-x^4 + mx^3 - 2x^2 - nx + 1$ por $x + 1$, sabendo que o quociente é $-x^3 - 4x^2 + 2x - 3$.

▶ ***Resolução***

Note que $x + 1 = x - (-1)$, então $a = -1$. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, obtemos:

$$\begin{array}{c|cccc:c} -1 & -1 & m & -2 & -n & 1 \\ \hline & -1 & 1 + m & -3 - m & 3 + m - n & -2 - m + n \end{array}$$

Então:

$Q(x) = -x^3 + (1 + m)x^2 + (-3 - m)x + 3 + m - n$ e $R(x) = -2 - m + n$

Vamos fazer a correspondência entre os coeficientes e calcular o valor de m e n.

$-x^3 + (1 + m)x^2 + (-3 - m)x + 3 + m - n = -x^3 - 4x^2 + 2x - 3$, $\forall\, x \in \mathbb{C}$.

- $1 + m = -4 \Rightarrow m = -5$
- $-3 - m = 2 \Rightarrow m = -5$
- $3 + m - n = -3 \Rightarrow 3 + (-5) - n = -3 \Rightarrow n = 1$

Como $R(x) = -2 - m + n$, temos:

$R(x) = -2 - (-5) + (1) = -2 + 5 + 1 = 4$

Logo, o resto dessa divisão é 4.

Reflita

O que poderíamos concluir se encontrássemos valores diferentes para m em cada equação?

Não existiria m para que a divisão indicada fosse possível.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução das questões **26** e **31** no Guia do professor.

26. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, encontre o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$.

a) $P(x) = 3x^2 + 2x - 4$ e $D(x) = x + 3$

b) $P(x) = -x^3 + x - 3$ e $D(x) = x - \frac{1}{3}$

c) $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ e $D(x) = x + \mathrm{i}$

d) $P(x) = x^5 - 2x^4 - \mathrm{i}x^3 + x - 2\mathrm{i}$ e $D(x) = x - \frac{\mathrm{i}}{2}$

27. Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, encontre o valor numérico de $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ para $x = 8$. 454

28. Ao dividirmos $x^3 - ax^2 + 2x - 2b$ por $x - 2$ e por $x + 1$, separadamente, obtemos os restos 5 e -2, respectivamente. Encontre os valores de a e b.

29. Sabendo que $x^2 + \mathrm{i}x - 1$ é o quociente da divisão de $x^3 + ax^2 - 2bx + 1$ por $x - \mathrm{i}$, determine o resto. $1 - \mathrm{i}$

30. No dispositivo de Briot-Ruffini abaixo, encontre os valores de a, b, c e d. $a = -11$, $b = 4$, $c = -1$ e $d = 21$

$$\begin{array}{c|ccccc:c} 2 & 2 & 1 & a & 5 & b & 1 \\ \hline & 2 & 5 & c & 3 & 10 & d \end{array}$$

31. Considere o polinômio $P(x) = -x^4 + mx^3 - nx + 2$.

- Dividindo $P(x)$ por $x + 2$, obtemos resto -28 e quociente $Q(x)$.
- Dividindo $Q(x)$ por $x - \mathrm{i}$, obtemos resto $10 - 9\mathrm{i}$ e quociente $Q_1(x)$.

Determine $Q(x)$ e $Q_1(x)$.

28. $a = \frac{8}{3}$ e $b = -\frac{11}{6}$

2.6 Divisão de polinômios pelo produto $(x - a)(x - b)$

Um polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - a)$ e também por $(x - b)$, com $a \neq b$, se, e somente se, $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$.

Observação

Os números a e b são as raízes de $(x - a)(x - b)$.

Exemplo

Vamos verificar se $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ é divisível por $(x + 2)(x - 4)$ sem efetuar a divisão. Temos:

- $P(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 8 = -8 - 12 + 12 + 8 = 0$
- $P(4) = (4)^3 - 3 \cdot (4)^2 - 6 \cdot (4) + 8 = 64 - 48 - 24 + 8 = 0$

Como $P(-2) = 0$, sabemos que $P(x)$ é divisível por $(x - (-2)) = (x + 2)$. O polinômio $P(x)$ também é divisível por $(x - 4)$, pois $P(4) = 0$.

Logo, o polinômio $P(x)$ é divisível pelo produto $(x + 2)(x - 4)$.

Dizer que um polinômio $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$ significa dizer que, fazendo a divisão de $P(x)$ por $(x - a)$ e, em seguida, a divisão do quociente obtido por $(x - b)$, obtemos resto zero.

Assim, nessas condições, existem $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ tal que:

- $P(x) = Q_1(x) \cdot (x - a)$
- $Q_1(x) = Q_2(x) \cdot (x - b)$

Logo, $P(x) = Q_2(x) \cdot (x - a) \cdot (x - b)$

Exemplo

Já vimos que $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ é divisível por $(x + 2)(x - 4)$. Vamos obter agora o quociente da divisão de $P(x)$ por esse produto, efetuando sucessivamente as divisões por $(x + 2)$ e por $(x - 4)$ pelo dispositivo de Briot-Ruffini.

Dividindo $P(x)$ por $(x + 2)$, temos:

−2	1	−3	−6	8
	1	−5	4	0

- $Q_1(x) = x^2 - 5x + 4$
- $R_1(x) = 0$

Dividindo o quociente obtido $Q_1(x)$ por $(x - 4)$, obtemos:

4	1	−5	4
	1	−1	0

- $Q_2(x) = x - 1$
- $R_2(x) = 0$

Verifique que: $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = \overbrace{(x - 1)}^{\text{quociente}} \cdot \overbrace{(x + 2)(x - 4)}^{\text{divisor}}$

Logo, o quociente dessa divisão é $Q_2(x) = x - 1$.

Observação

Podemos juntar as duas etapas dessa divisão assim:

−2	1	−3	−6	8
4	1	−5	4	0
	1	−1	0	

Exercícios resolvidos

R15. Descobrir se $P(x) = x^3 + (1 - i)x^2 - ix$ é divisível por $x^2 + x$ e determinar o quociente dessa divisão.

Resolução

Temos: $x^2 + x = x(x + 1) = (x - 0)(x + 1)$

Para saber se $P(x)$ é divisível por $(x - 0)(x + 1)$, vamos fazer divisões sucessivas com cada fator, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini.

0	1	1 − i	−i	0
−1	1	1 − i	−i	0
	1	−i	0	

Portanto, $P(x)$ é divisível por $x^2 + x$, pois o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 + x$ é zero.

O quociente procurado é $Q(x) = x - i$.

R16. Sabendo que $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ é divisível por $D(x) = (3x - 3)(2x - 4)$, determinar o quociente dessa divisão.

▸ ***Resolução***

Temos:

$(3x - 3)(2x - 4) = 3(x - 1) \cdot 2(x - 2) = 6(x - 1)(x - 2)$

Como $P(x)$ é divisível por $D(x)$, temos:

$P(x) = Q(x) \cdot 6(x - 1)(x - 2) = Q_1(x) \cdot (x - 1)(x - 2)$, com $Q_1(x) = 6 \cdot Q(x)$

Assim, para achar $Q(x)$, basta dividir $P(x)$ sucessivamente por $(x - 1)$ e $(x - 2)$, obtendo $Q_1(x)$. Em seguida, dividimos $Q_1(x)$ por 6.

1	1	−5	8	−4
2	1	−4	4	0
	1	−2	0	

Assim: $Q_1(x) = x - 2$

Logo, o quociente é: $Q(x) = \dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{3}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução das questões **33**, **34**, **35** e **36** no Guia do professor.

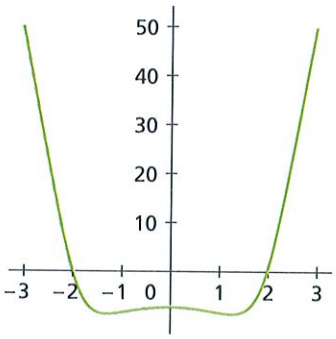
32. Verifique se $P(x)$ é divisível por $D(x)$ sem efetuar a divisão. Justifique o procedimento.

a) $P(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 24$
$D(x) = (x - 2)(x + 2)$ É.

b) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 2$
$D(x) = x^2 - x$ Não é.

c) $P(x) = x^5 - i$
$D(x) = (x - i)(x + i)$ Não é.

33. (Ufal) A figura a seguir ilustra parte do gráfico de um polinômio $p(x)$, com coeficientes reais, de grau quatro e com coeficiente dominante igual a 1. O gráfico passa pelos pontos $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -4)$ e $(1, -6)$. Admitindo essas informações, escreva no caderno a alternativa incorreta. alternativa c



ADILSON SECCO

a) $p(x)$ é divisível por $x^2 - 4$.

b) O coeficiente constante de $p(x)$ é igual a -4.

c) $p(x)$ admite três raízes reais.

d) $p(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

e) $p(-x) = p(x)$, para todo x real

34. Quais são as condições para que um polinômio $A(x)$ seja divisível por $(x - 1)^2$?

35. Um polinômio $P(x)$ quando dividido por $x - 2$ dá resto 7 e quando dividido por $x - 3$ dá resto 11.

a) Determine o valor de $P(2)$ e $P(3)$, justificando sua resposta.

b) Sejam $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 2)(x - 3)$. Que tipo de polinômio é o resto $R(x)$?

c) Utilizando a relação
$P(x) = Q(x) \cdot (x - 2)(x - 3) + R(x)$, monte um sistema e determine $R(x)$.

- Com um colega, verifique se é possível generalizar esse procedimento.

36. Considere um polinômio $P(x)$ de grau n.

a) Suponha que $P(x)$ seja divisível por $(x - a)$ e também por $(x - b)$. Nessas condições, responda:

- O que você pode dizer dos valores de $P(a)$ e $P(b)$? Justifique.
- Que tipo de polinômio é o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x) = (x - a)(x - b)$?
- Utilizando a relação $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$, o que você pode dizer sobre $R(x)$?

Elabore uma justificativa para mostrar que, nas condições dadas, $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$.

b) Suponha agora que $P(x)$ seja divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$. Nessas condições, responda:

- O que você pode dizer sobre o resto dessa divisão?
- Quanto vale $P(a)$ e $P(b)$?
- O que você pode dizer sobre o resto das divisões de $P(x)$ por $(x - a)$ e por $(x - b)$? Justifique.

Com um colega, elabore uma justificativa para mostrar que, nas condições dadas, $P(x)$ é divisível por $(x - a)$ e também por $(x - b)$.

3 Equações polinomiais ou algébricas

3.1 Definição de equação algébrica

Você já trabalhou com equações como $x - 1 = 0$ e $3x^2 - 2x - 1 = 0$, com coeficientes reais e no universo real. Essas equações são exemplos de equações algébricas. Agora, vamos estudar mais a fundo esse tipo de equação no universo complexo, considerando seus coeficientes em $\mathbb{C}$.

Equação polinomial ou **algébrica** é toda equação na forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, sendo $x \in \mathbb{C}$ a incógnita, $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ coeficientes complexos (reais ou não), com $a_n \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}^*$.

Note que $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$, é um polinômio $P(x)$ de grau n. A equação polinomial correspondente tem grau n.

Exemplos

a) $x^2 + 5x + 6 + i = 0$ é uma equação polinomial do 2º grau cujos coeficientes são 1, 5 e $(6 + i)$.

b) $2x^5 + 3x^4 - x^2 + x = 0$ é uma equação de grau 5.

c) $kx^3 + 6x - 8i = 0$ é uma equação de grau 3 se $k \neq 0$ e de grau 1 se $k = 0$.

3.2 Raiz de uma equação algébrica

Um número complexo α é **raiz** de uma equação algébrica $P(x) = 0$, de grau n, quando α é raiz de $P(x)$, ou seja: $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$

Você já viu que resolver uma equação $P(x) = 0$ consiste em determinar os valores de x, em um dado universo, que tornam a igualdade verdadeira.

O **conjunto solução** de uma equação algébrica é o conjunto de todas as raízes dessa equação que pertencem ao conjunto universo considerado.

Exemplos

a) Vamos verificar se 2 é raiz da equação:
$P(x) = 6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$
Substituindo x por 2 na equação, obtemos:
$6 \cdot 2^4 + 7 \cdot 2^3 - 3^6 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 6 = 0$
$96 + 56 - 144 - 14 + 6 = 0$
$158 - 158 = 0$ (verdadeira)
Logo, 2 é uma raiz da equação dada.

b) Vamos mostrar que i é raiz da equação $x^3 - (-1 + i)x^2 - i \cdot x = 0$, mas não é raiz da equação $x^3 - (-1 - i)x^2 + i \cdot x = 0$.
Substituindo x por i na 1a equação, obtemos:
$i^3 - (-1 + i) \cdot i^2 - i \cdot i = 0$
$i^3 + i^2 - i^3 - i^2 = 0$ (verdadeira)
Substituindo x por i na 2ª equação, obtemos:
$i^3 - (-1 - i) \cdot i^2 + i \cdot i = 0$
$i^3 + i^2 + i^3 + i^2 = 0$
$-2i - 2 = 0$ (falsa)
Logo, i é raiz só da 1ª equação.

c) Vamos determinar o conjunto solução, em $\mathbb{C}$, da equação $x^2 - ix + 2 = 0$
Fatorando o trinômio do 2º grau do 1º membro da equação, temos:
$x^2 - ix + 2 = 0$
$x^2 + ix - 2ix - 2i^2 = 0$
$x(x + i) - 2i(x + i) = 0$
$(x - 2i)(x + i) = 0$
$x - 2i = 0$ ou $x + i = 0$
$x = 2i$ ou $x = -i$
Logo, $S = \{2i, -i\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

37. Determine o conjunto solução da equação $x^3 + x = 0$, em $\mathbb{C}$. $S = \{0, i, -i\}$

38. Encontre o conjunto solução da equação $3x^3 + 27x = 0$, em $\mathbb{C}$. $S = \{0, 3i, -3i\}$

39. Calcule k sabendo que 1 é uma das raízes da equação $x^4 - 8x^3 + kx^2 - 32x + 15 = 0$. 24

40. Dados os números 1, 0, -1, 3, quais fazem parte do conjunto solução de $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$? 1 e 3

3.3 Teorema fundamental da Álgebra

O teorema fundamental da Álgebra foi originalmente demonstrado pelo matemático Carl F. Gauss, em 1799, em sua tese de doutorado.

Toda equação algébrica $P(x) = 0$ de grau n, com $n \geqslant 1$, admite pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

A demonstração desse teorema não será objeto de nosso estudo. Contudo, esse teorema é importante para entendermos as relações entre as raízes e a forma fatorada de um polinômio.

Por esse teorema, toda equação polinomial $P(x) = 0$ sempre tem raiz em $\mathbb{C}$, ou seja, qualquer polinômio $P(x)$ de grau n, com $n \geqslant 1$, tem ao menos uma raiz complexa.

3.4 Teorema da decomposição

O teorema da decomposição é consequência do teorema fundamental da Álgebra.

Todo polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ de grau n maior ou igual a 1, em $\mathbb{C}$, pode ser fatorado da seguinte forma
$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot ... \cdot (x - \alpha_{n-1}) \cdot (x - \alpha_n)$,
sendo a_n o coeficiente dominante e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n$ as raízes desse polinômio.

Demonstração

Pelo teorema fundamental da Álgebra, o polinômio $P(x)$ tem pelo menos uma raiz complexa α_1. Portanto, pelo teorema de D'Alembert, $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha_1)$.

Daí, existe $Q_1(x)$ de grau $(n - 1)$ tal que: $P(x) = Q_1(x) \cdot (x - \alpha_1)$

- Se $P(x)$ tem grau 1, $Q_1(x) = k$ tem grau zero. Assim: $P(x) = k \cdot (x - \alpha_1)$
- Se $P(x)$ tem grau 2, $Q_1(x)$ tem grau 1. Então, aplicando o teorema fundamental da Álgebra e o teorema de D'Alembert a $Q_1(x)$, existem α_2, raiz complexa de $Q_1(x)$, e $Q_2(x)$ que tem grau zero, tais que: $P(x) = Q_2(x) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_1)$
- Usando esse raciocínio, aplicamos o teorema fundamental da Álgebra e o de D'Alembert até obter um polinômio constante $Q_n(x) = k$, de modo que: $P(x) = k \cdot (x - \alpha_n) \cdot (x - \alpha_{n-1}) \cdot ... \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_1)$

Desenvolvendo esse produto, verificamos que k é o coeficiente dominante a_n de $P(x)$ e, portanto, obtemos $P(x)$ decomposto da seguinte forma:
$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot ... \cdot (x - \alpha_{n-1}) \cdot (x - \alpha_n)$
Essa decomposição é única, exceto pela ordem dos fatores.

Pelo teorema da decomposição, podemos concluir que:

Toda equação algébrica de grau n (com $n \geqslant 1$) admite, em $\mathbb{C}$, exatamente n raízes complexas (reais ou não), não necessariamente distintas.

Observações

- Expressar um polinômio $P(x)$ na forma fatorada é apresentá-lo como produto de polinômios do 1º grau e de uma constante (coeficiente dominante de $P(x)$).
- Se α é uma raiz de $P(x)$, então dizemos que $(x - \alpha)$ é um **fator** do polinômio $P(x)$.

Reflita

Decomponha o polinômio $P(x)$ em fatores do 1º grau.

- $P(x) = x^2 + 1$
- $P(x) = -x^3 - 3ix^2 + 2x$

- $x^2 + 1 = x^2 - (-1) = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$
- $-x^3 - 3ix^2 + 2x = -x(x^2 + 3ix - 2) = -x(x + i)(x + 2i)$

Exemplos

a) Vamos escrever $P(x)$ na forma fatorada:

$P(x) = -3x^2 + 6ix + 3 = -3(x^2 - 2ix - 1) = -3(x^2 - 2ix + i^2) = -3(x - i)^2$

b) Vamos verificar que -2, 1 e 4 são raízes do polinômio $P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 16$ e escrevê-lo decomposto em fatores de grau 1.

- $P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 16 = 0$
- $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 16 = 0$
- $P(4) = 2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 16 = 0$

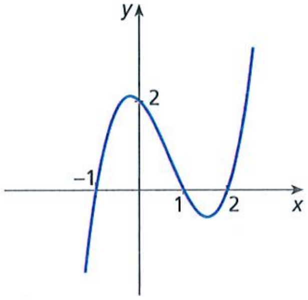
Pelo teorema da decomposição, temos:

$P(x) = a_3(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3)$, sendo $a_3 = 2$ e $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 4$ as raízes de $P(x)$.

Então, podemos expressar $P(x)$ assim:

$P(x) = 2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)$

c) A curva apresentada a seguir corresponde ao gráfico do polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.



ADILSON SECCO

Note que -1, 1 e 2 são as três raízes de $P(x)$, pois, observando o gráfico, temos:

$P(-1) = P(1) = P(2) = 0$ (valores de x em que o gráfico cruza o eixo x)

Como $P(x) = a_3(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$ e sabendo que $a_3 = 1$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = 2$, podemos decompor $P(x)$ da seguinte forma:

$P(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$

Exercício resolvido

R17. Sabendo que 3i e 5 são duas raízes da equação a seguir, encontrar o conjunto solução, em $\mathbb{C}$, da equação:

$x^4 - (4 + 3i)x^3 + (-7 + 12i)x^2 + (10 + 21i)x - 30i = 0$

▶ ***Resolução***

Sendo 3i e 5 raízes da equação $P(x) = 0$ dada, sabemos que o polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - 3i)$ e $(x - 5)$. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

3i	1	$-4 - 3i$	$-7 + 12i$	$10 + 21i$	$-30i$
5	1	-4	-7	10	0
	1	1	-2	0	

Logo: $P(x) = (x^2 + x - 2)(x - 3i)(x - 5)$

As raízes do quociente $Q(x) = x^2 + x - 2$ também são raízes de $P(x)$.

Determinando as raízes de $Q(x)$, encontramos -2 e 1, que são as outras duas raízes de $P(x)$.

Portanto, o conjunto solução da equação dada é: $S = \{3i, 5, -2, 1\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução das questões **42** e **43** no Guia do professor.

41. Escreva o polinômio $P(x) = 2x^4 - 2$ na forma fatorada, sendo 1, -1, i e $-i$ as suas raízes.
$P(x) = 2(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$

42. Encontre uma equação de grau 3 que tenha como raízes os números -1, $\frac{1}{2}$ e 2.

43. Sabendo que α é uma das raízes de um polinômio de grau 3, explique como podem ser encontradas as demais raízes desse polinômio.

44. Sabendo que uma das raízes da equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ é 2, encontre as outras. -1 e 1

45. Encontre o conjunto solução da equação $2x^3 - (5 - 4i)x^2 + (2 - 10i)x + 4i = 0$, sabendo que $\frac{1}{2}$ e 2 são raízes dessa equação. $S = \left\{\frac{1}{2}, 2, -2i\right\}$

46. Encontre todas as raízes da equação $2x^3 - 4x^2 - 6x = 0$ e decomponha o polinômio $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x$ como produto de fatores de grau 1. -1, 0 e 3; $P(x) = 2x(x + 1)(x - 3)$

47. Resolva a equação $x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 24 = 0$, sabendo que -3 e -2 pertencem ao conjunto solução dessa equação. $S = \{-3, -2, 2\}$

3.5 Multiplicidade de uma raiz

Já vimos que toda equação polinomial $P(x) = 0$ de grau n, $n \geqslant 1$, tem exatamente n raízes complexas (não necessariamente distintas) e que elas são também as raízes do polinômio $P(x)$.

Mais um exemplo

A raiz 0 é de multiplicidade 3 na equação $x^3 \cdot (x - 1) = 0$, e 1 é raiz simples.

Exemplo

Veja a fatoração do polinômio $P(x)$: $P(x) = x^2 - 2ix - 1 = (x - i)^2 = (x - i)(x - i)$

Então, a equação do 2º grau $x^2 - 2ix - 1 = 0$ tem **duas raízes iguais a i**:

$x^2 - 2ix - 1 = 0 \Rightarrow (x - i)(x - i) = 0 \Rightarrow x - i = 0 \Rightarrow x = i$

O número de vezes que uma raiz aparece na decomposição de um polinômio em fatores de grau 1 é a **multiplicidade** dessa raiz. No exemplo, i é uma raiz dupla ou de multiplicidade 2. As raízes que não se repetem são as **raízes simples**.

Uma raiz α de uma equação polinomial $P(x) = 0$ é uma **raiz de multiplicidade *m***, com m natural não nulo, quando $P(x) = (x - \alpha)^m \cdot Q(x)$ e $Q(\alpha) \neq 0$.

Note que o polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha)^m$, mas $Q(x)$, não, já que $Q(\alpha) \neq 0$. Então, α não é raiz de $Q(x)$, o que garante que a multiplicidade da raiz α não seja maior que m e que a equação $P(x) = 0$ tenha exatamente m raízes iguais a α.

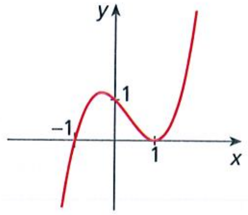
Se α é raiz de $P(x) = 0$, a divisão de $P(x)$ por $(x - \alpha)$ implica: $P(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha)$

Assim: $P(x) = 0 \Leftrightarrow Q(x) \cdot (x - \alpha) = 0 \Leftrightarrow Q(x) = 0$ ou $x - \alpha = 0$

Então, as demais raízes da equação $P(x) = 0$ são as raízes da equação $Q(x) = 0$.

Reflita

O gráfico abaixo representa o polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.



ADILSON SECCO

- Determine as raízes de $P(x)$ e escreva-o na forma fatorada.
- Indique a multiplicidade de cada uma das raízes de $P(x)$.

Ver resolução no Guia do professor.

Exercício resolvido

R18. Resolver a equação $x^5 + 10x^4 - 6x^3 - 176x^2 + 133x + 294 = 0$, em $\mathbb{C}$, sendo -7 raiz dupla e 2 raiz de multiplicidade 1 (ou raiz simples) dessa equação.

▸ ***Resolução***

Como -7 é raiz dupla e 2 é raiz simples da equação $P(x) = 0$, o polinômio $P(x)$ é divisível por $(x + 7)^2 \cdot (x - 2)$. Então, aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, obtemos um quociente $Q(x)$ e uma equação de grau menor, de fácil resolução.

−7	1	10	−6	−176	133	294
−7	1	3	−27	13	42	0
2	1	−4	1	6	0	
	1	−2	−3	0		

Assim, temos $x^2 - 2x - 3 = 0$ cujas raízes -1 e 3 também são raízes da equação $P(x) = 0$ dada e, portanto, o conjunto solução procurado é $S = \{-7, 2, -1, 3\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

48. Resolva a equação, em $\mathbb{C}$, e dê as multiplicidades: $(-5x^3 - 15x^2 + 50x) \cdot (x + 1)^4 = 0$
Ver resolução no Guia do professor.

49. Dê uma equação algébrica de menor grau que tenha 2 como uma raiz quádrupla e -3 como uma raiz simples. Ver resolução no Guia do professor.

50. Se i é raiz de multiplicidade 2 da equação $x^3 + (3 - 2i)x^2 - (1 + 6i)x - 3 = 0$, qual é a outra raiz? -3

51. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $2x^3 + 6x^2 - 8 = 0$, sabendo que -2 é raiz dupla dessa equação.
$S = \{-2, 1\}$

52. Considere as equações do tipo $P(x) = 0$, em $\mathbb{C}$:
- $2x^3 - 6x + 4 = 0$
- $x^4 + (-3 - i)x^3 + (3 + 3i)x^2 + (-1 - 3i)x + i = 0$
- $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$

a) Cite semelhanças e diferenças entre elas.
b) Calcule $P(1)$ para cada equação.
c) Verifique se 1 é raiz de todas elas.
d) Como saber se 1 é raiz de uma equação?
Ver resolução no Guia do professor.

3.6 Raízes de equações polinomiais com coeficientes reais

Raízes complexas não reais

Se um número complexo $z = a + bi$, com a e b reais e $b \neq 0$, é raiz de uma equação polinomial com **coeficientes reais**, então o conjugado $\bar{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Assim, se o complexo z (**não real**) é raiz de multiplicidade m de uma equação de coeficientes reais, então o conjugado $\bar{z}$ também é raiz de multiplicidade m da mesma equação.

Exemplo

Sabendo que $5 + 2i$ é uma das raízes da equação $x^4 - 11x^3 + 37x^2 - 9x - 58 = 0$, vamos determinar as demais raízes dessa equação, em $\mathbb{C}$.

Como a equação tem coeficientes reais e $z = 5 + 2i$ é raiz dela, então $\bar{z} = 5 - 2i$ também é raiz da equação. Com o dispositivo de Briot-Ruffini, obtemos uma equação de grau menor cujas raízes são as demais raízes da equação dada:

$5 + 2i$	1	-11	37	-9	-58
$5 - 2i$	1	$-6 + 2i$	$3 - 2i$	$10 - 4i$	0
	1	-1	-2	0	

Resolvendo a equação obtida $x^2 - x - 2 = 0$, temos as outras raízes, -1 e 2.

Assim, além de $5 + 2i$, as outras três raízes da equação são $5 - 2i$, -1 e 2.

Reflita

As raízes complexas não reais de uma equação algébrica com coeficientes reais ocorrem sempre aos pares. Então, o que você pode afirmar sobre as raízes de uma equação algébrica de coeficientes reais e grau ímpar?

Que elas admitem pelo menos uma raiz real.

Pesquisa de raízes racionais

Se $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros não nulos e primos entre si, é **raiz racional** da equação algébrica de grau n e **coeficientes inteiros** $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ (com $a_n \neq 0$), então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Observação

Se nenhum dos possíveis valores encontrados for raiz da equação, então a equação não tem raízes racionais.

Esse teorema não garante a existência de raiz racional em equações algébricas com coeficientes inteiros. Mas, se ela existir, indica uma forma de encontrá-la.

Exemplo

Vamos encontrar as raízes inteiras da equação:

$$x^4 - \frac{7}{6}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = 0$$

Note que, nesse caso, a equação não tem coeficientes inteiros; no entanto, multiplicando os dois membros por 6, obtemos a equação $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2 = 0$, de coeficientes inteiros e equivalente à equação dada e, portanto, com mesmas raízes.

Assim, $a_0 = 2$ e $a_n = 6$.

Possíveis valores de p: $D(2) = \{\pm1, \pm2\}$ Possíveis valores de q: $D(6) = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$	$\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si: $\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm2, \pm\frac{2}{3}$	Verificando os valores encontrados, temos como raízes inteiras da equação: -1 e 2

Em equações com coeficientes inteiros e $a_n = 1$, se existirem raízes racionais, estas serão inteiras e divisoras de a_0.

Reflita

No exemplo ao lado, é necessário usar todos os valores encontrados na pesquisa?

Ver resolução no Guia do professor.

Exercício resolvido

R19. Encontrar as raízes inteiras da equação $x^3 - 4x^2 + 25x - 100 = 0$ e depois resolvê-la em $\mathbb{C}$.

▶ ***Resolução***

Como a equação dada tem todos os coeficientes inteiros, aplicamos o teorema das raízes racionais.

$p \in \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20, \pm25, \pm50, \pm100\}$ (divisores de a_0)

$q \in \{\pm1\}$ (divisores de a_n)

Logo: $\frac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20, \pm25, \pm50, \pm100\}$

Utilizando o polinômio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 25x - 100$, verificamos se algum elemento desse conjunto é raiz da equação dada.

Obtemos: $P(1) \neq 0$, $P(-1) \neq 0$, $P(2) \neq 0$, $P(-2) \neq 0$ e $P(4) = 0$

Como $P(4) = 0$, sabemos que 4 é raiz da equação. Com essa raiz, podemos aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini e encontrar uma equação de grau menor.

$$\begin{array}{c|ccc:c} 4 & 1 & -4 & 25 & -100 \\ \hline & 1 & 0 & 25 & 0 \end{array}$$

Resolvendo a equação $x^2 + 25 = 0$, obtemos as outras raízes:

$x^2 + 25 = 0 \Rightarrow x^2 = -25 \Rightarrow x^2 = 25i^2 \Rightarrow x = \pm5i$

Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{4, -5i, 5i\}$.

Reflita

Explique um procedimento que você usaria se a equação tivesse grau 5.

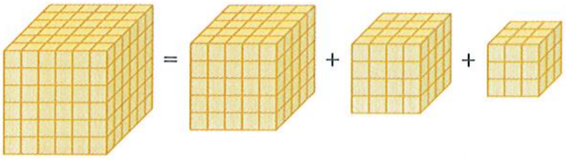
Resposta possível:
Tentaria achar mais duas raízes, para conseguir baixar o grau até uma equação quadrática. Caso não as encontrasse, repetiria o processo para a primeira equação encontrada de grau menor.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

53. Qual é o grau mínimo da equação algébrica de coeficientes reais que admite as raízes -3 de multiplicidade 2, 5 de multiplicidade 1 e $-2 + i$ de multiplicidade 3? 9

54. (UFRN) O volume do cubo de aresta 6 é igual à soma dos volumes dos cubos de arestas 5, 4 e 3, conforme ilustração abaixo.
Ver resolução no Guia do professor



ADILSON SECCO

a) Comprove a afirmação acima, explicitando os cálculos.

b) Determine as raízes inteiras e positivas da equação polinomial $n^3 = (n - 1)^3 + (n - 2)^3 + (n - 3)^3$, para justificar que o único cubo de aresta inteira n que tem volume igual à soma dos volumes de arestas $n - 1$, $n - 2$ e $n - 3$ é o cubo de aresta 6.

55. Resolva as equações, em $\mathbb{C}$.

a) $3x^3 - 14x^2 + 13x + 6 = 0$ $S = \left\{-\frac{1}{3}, 2, 3\right\}$

b) $2x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 26x - 20 = 0$
$S = \{-2 - i, -2 + i, -1, 2\}$

56. Determine o valor racional de x para que $P(x) = 16$, sendo: $P(x) = 2x^3 - 28x^2 + 90x - 84$ 10

57. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é $\alpha = i - 2$.
$S = \{i - 2, -i - 2, 1 + 2i, 1 - 2i\}$

58. Considere a equação:

$4x^7 + 12x^6 + 7x^5 - 3x^4 - 2x^3 = 0$

a) É possível você usar todos os divisores do termo independente de x? Por quê? Não, pois $D(0) = \mathbb{Z}^*$.

b) É impossível descrever todas as prováveis raízes racionais para equações dessa forma? Sim

c) Que procedimento você pode utilizar para resolver equações desse tipo?

d) Resolva a equação, em $\mathbb{C}$, e indique a multiplicidade de cada raiz. Ver resolução no Guia do professor.

59. Considere a equação $x^2 - 2 = 0$.

a) O teorema das raízes racionais pode ser aplicado a essa equação? Por quê? Em caso afirmativo, faça a pesquisa dessas raízes.

b) Verifique se $\sqrt{2}$ é raiz dessa equação. Sim

c) O que você pode concluir a respeito do número $\sqrt{2}$?

58. c) Resposta possível:
Fatorar o polinômio; nesse caso, colocando x^3 em evidência.

59. a) Sim, porque a equação possui apenas coeficientes inteiros. A equação não possui raízes racionais.

c) Que $\sqrt{2}$ não é racional. Com base nesse exercício e no teorema das raízes complexas não reais de uma equação algébrica de coeficientes reais, fica demonstrado que $\sqrt{2}$ é um número real irracional.

3.7 Relações de Girard

As **relações entre os coeficientes e as raízes** de uma equação algébrica são mais uma ferramenta para auxiliar na resolução desse tipo de equação quando é dada uma condição para as raízes. Elas são denominadas **relações de Girard** em homenagem ao matemático francês Albert Girard (1595-1632), que se dedicou ao estudo das equações algébricas.

Observação

As relações entre coeficientes e raízes permitem também formar uma equação algébrica a partir de suas raízes com certa facilidade.

Relações entre coeficientes e raízes de uma equação do 2º grau

Considere a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ cujas raízes são α_1 e α_2. Assim, temos: $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ (I)

Como $a \neq 0$, dividimos membro a membro a equação (I) por a e desenvolvemos o 2º membro, obtendo: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2$ (II)

Pela identidade de polinômios em (II):
- $\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a}$
- $\alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a}$

Relações entre coeficientes e raízes de uma equação do 3º grau

Considere a equação do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$ cujas raízes são α_1, α_2 e α_3. Procedendo de modo análogo ao da equação do 2º grau, obtemos:

- $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a}$
- $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{c}{a}$
- $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a}$

Exemplo

Vamos achar uma equação algébrica que tenha zero como raiz simples e i como raiz dupla.

A equação é do 3º grau, já que tem 3 raízes. Então: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$

Como zero é raiz, o termo independente de x é zero, isto é, $d = 0$. Portanto:

- $0 + i + i = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a} = 2i \Rightarrow b = -2ia$
- $0 \cdot i + 0 \cdot i + i \cdot i = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow c = -a$

Assim, temos a equação $ax^3 - 2iax^2 - ax = 0$. Escolhendo um valor complexo para a, obtemos uma equação nas condições pedidas.

Logo, fazendo $a = 1$, temos a equação $x^3 - 2ix^2 - x = 0$.

Reflita

Escreva as relações de Girard para cada equação:
- $2x^3 + 8x^2 + 6x - 10 = 0$
- $-2x^4 - x^2 + 20 = 0$

Ver resolução no Guia do professor.

Relações entre coeficientes e raízes de uma equação de grau *n*

As relações de Girard podem ser generalizadas para equações de grau n, com $n > 3$.

Considere a equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$, cujas n raízes são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n-1}$ e α_n. As relações de Girard para essa equação são:

- $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
- $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$

$\vdots$
- $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdot \cdots \cdot \alpha_{n-1}\alpha_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$

Exemplo

Vamos encontrar as quatro raízes da equação $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x = 0$.

O termo independente é nulo, então zero é uma raiz.

Note que a soma dos coeficientes $(1 - 5 + 8 - 4)$ é zero. Assim, 1 também é raiz dessa equação.

Pelas relações de Girard:
- $-\frac{b}{a} = -\frac{(-5)}{1} = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 + 1$
- $-\frac{d}{a} = -\frac{(-4)}{1} = 4 = \alpha_1\alpha_2$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 4 \\ \alpha_1\alpha_2 = 4 \end{cases}$$

obtemos 2 como raiz dupla.

Exercícios resolvidos

R20. Dada a equação $4x^3 - 10x^2 + 2x - 40 = 0$ de raízes α_1, α_2 e α_3, calcular:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1\alpha_3} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2}$$

▶ ***Resolução***

As relações de Girard para a equação dada são:

- $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-10)}{4} = \frac{5}{2}$
- $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{c}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{(-40)}{4} = 10$

Note que, na expressão dada, essas relações não aparecem. Então, vamos efetuar operações modificando-a até que possamos usar as relações acima.

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1\alpha_3} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2} =$$

$$= \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} =$$

$$= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} =$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{10} =$$

$$= \frac{\frac{25}{4} - 1}{10} =$$

$$= \frac{21}{40}$$

R21. Sabendo que as raízes da equação $0{,}1x^3 + 3{,}5x^2 + 35x + 100 = 0$ são reais distintas entre si e estão em PG, resolver essa equação em $\mathbb{C}$.

▶ ***Resolução***

Seja $q \neq 0$ a razão da PG formada pelas raízes.

Então, podemos indicá-las por $\frac{\alpha}{q}$, α e αq.

Das relações de Girard, temos:

$$\frac{\alpha}{q} \cdot \alpha \cdot \alpha q = -\frac{d}{a}$$

$$\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = -\frac{100}{0{,}1}$$

$$\alpha^3 = -1.000$$

$$\alpha^3 = (-10)^3$$

$$\alpha = -10$$

Usando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{r|rrr:r} -10 & 0{,}1 & 3{,}5 & 35 & 100 \\ \hline & 0{,}1 & 2{,}5 & 10 & 0 \end{array}$$

Obtemos a equação:

$$0{,}1x^2 + 2{,}5x + 10 = 0$$

$$x = \frac{-2{,}5 \pm 1{,}5}{0{,}2}$$

$$x = -5 \text{ ou } x = -20$$

Note que -20, -10 e -5 estão em PG $\left(q = \frac{1}{2}\right)$ e que -5, -10 e -20 estão em PG ($q = 2$).

Logo, a equação dada tem a seguinte solução:

$S = \{-10, -5, -20\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

60. Escreva as relações de Girard para as equações a seguir. Ver resolução no Guia do professor.

a) $2x^3 + 5x^2 - 12x + 1 = 0$

b) $\sqrt{2}\,x^4 - 2\sqrt{2}\,x^3 + x^2 - 4x = 0$

61. Obtenha a soma e o produto das raízes das equações.

a) $5x^3 + 10x^2 + 20x - 15 = 0$ soma: -2; produto: 3

b) $-3x^4 - x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 6x - 9 = 0$ soma: $-\frac{1}{3}$; produto: 3

62. Encontre as raízes de $x^3 - 4x^2 - 19x - 14 = 0$, sabendo que a soma de duas delas é 5. -2, -1 e 7

63. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$, sabendo que o produto de duas de suas raízes é 8. $S = \{-4, -2, 2\}$

64. A equação $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = 0$ tem duas raízes inversas entre si. Ache o conjunto solução. $S = \left\{-2, \frac{1}{3}, 3\right\}$

65. Escreva uma equação polinomial de grau 3 que tenha soma das raízes 3 e produto -24. A soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas deve ser -10. Essa equação é única? Qualquer equação do tipo $a(x + 3)(x - 2)(x - 4) = 0$, com $a \neq 0$.

66. As raízes da equação $x^3 + 3x^2 - 22x - 24 = 0$ formam uma progressão aritmética. Encontre-as. -6, -1 e 4

67. Determine k real tal que as raízes da equação $x^3 - 12x^2 + (k + 1)x - 60 = 0$ sejam números inteiros consecutivos. 46

68. Dada a equação $-8x^3 - 2x^2 + 4x + 6 = 0$ cujas raízes são p, q e r, encontre o valor das expressões:

a) $p^2 + q^2 + r^2$ $\frac{17}{16}$

b) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ $-\frac{2}{3}$

69. A equação $x^4 - 6x^3 + x^2 + 24x + 16 = 0$ tem, em $\mathbb{C}$, duas raízes reais de multiplicidade 2. Encontre-as. $S = \{-1, 4\}$

70. Determine p real tal que $x^3 - 2x^2 - 5px + 50 = 0$ tenha duas raízes opostas. 5

71. Para que valor de m as raízes da equação $4x^3 - 12x^2 + 11x - m = 0$ formam uma PA? 3

72. As raízes de $x^3 - 70x^2 + 1.400x = 8.000$ formam uma PG de termos reais. Encontre-as. 10, 20 e 40

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. Determine o polinômio $P(x)$ do 1º grau tal que: $P(1 - i) = i$ e $P(-i) = -1 + 2i$ $P(x) = (1 - i)x + 3i$

2. Uma empresa investe x milhões de reais por ano em propaganda. O lucro anual dessa empresa varia em função de x de acordo com a lei $L(x) = x^4 - 5x^2$. Qual a diferença de lucro que ela terá se mudar seu investimento de 3 para 4 milhões de reais por ano? 140 milhões

3. Calcule o valor de a tal que seja nulo o polinômio $P(x) = (a^2 - 1)x^2 + (a^2 + 2a - 3)x + (a^2 - 3a + 2)$. 1

4. A medida da aresta de um cubo é $(x + p)$ cm com x e p reais tais que $(x + p) > 0$. Quando calculamos o volume desse cubo, encontramos a expressão $V(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$. Calcule o valor de p. 3

5. Determine o polinômio $P(x)$ do 3º grau cujas raízes são 0, 1 e 2, sabendo que $P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.
$P(x) = -4x(x - 1)(x - 2) = -4x^3 + 12x^2 - 8x$

6. Calcule a soma dos coeficientes do polinômio: $P(x) = (3x^2 - 2x + 1)^5 + x^2 - x - 1$ 31

Exercício resolvido

R22. Encontrar o termo independente de x (termo de grau zero) do polinômio $P(x) = (x^3 + 2x^2 - 5)^2$.

▸ ***Resolução***

Desenvolvendo o quadrado, temos:
$P(x) = x^6 + 4x^5 - 10x^3 + 4x^4 - 20x^2 + 25$
Assim, o termo independente de $P(x)$ é 25.
Entretanto, note que $P(0)$ também é 25.
Isso vale sempre. Logo, para achar o termo independente de um polinômio $P(x)$, basta calcular o valor numérico de $P(x)$ para $x = 0$, isto é, $P(0)$.

7. Determine o termo de grau zero do polinômio: $P(x) = (4x^3 - 3x - 1)^{100} \cdot (x^2 + 2x - 1)^{99} \cdot (x^4 + x - 2)^3$ 8

8. Determine os valores de a e b de modo que $P(x) = x^3 - 7x^2 + ax + b$ seja divisível por $D(x) = x^2 - 3x + 2$. $a = 14$ e $b = -8$

9. (FEMM-MG) Seja $P(x)$ um polinômio de coeficientes reais. Na divisão de $P(x)$ por $(x - 3)$, obtêm-se quociente $Q(x)$ e resto igual a 5. Se $Q(1) = 3$ e $Q(2) = 2$, então $P(1) + P(2)$ é igual a: alternativa c

a) -1
b) -3
c) 2
d) 3

10. Determine m complexo tal que $D(x) = 2x - 1$ seja divisor de $P(x) = 2x^5 - x^4 + mx^3 - x^2 - 3mx + 3$. 2

11. (ESPM-SP) O polinômio
$P(x) = kx^5 + (k + 1)x^4 - kx^3 + 2kx$ é divisível por $x + 1$. O valor de $P(2)$ é: alternativa a

a) 60
b) 52
c) 24
d) -4
e) -28

12. Um polinômio $P(x)$, quando dividido por $x - 2$, dá resto 5 e, quando dividido por $x + 3$, dá resto 11. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 2)(x + 3)$. $R(x) = -\frac{6}{5}x + \frac{37}{5}$

13. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10 = 0$, sabendo que -2 e 1 são duas de suas raízes.
$S = \{-2, 1, 1 + 2i, 1 - 2i\}$

14. Determine a soma dos inversos dos quadrados das raízes da equação $x^3 - 2x^2 + x - 4 = 0$. $-\frac{15}{16}$

15. (Fuvest-SP) O produto de duas das raízes do polinômio $P(x) = 2x^3 - mx^2 + 4x + 3$ é igual a -1. Determine:

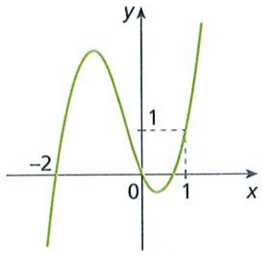
a) o valor de m; 7
b) as raízes de $P(x)$. $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$ e $\frac{3}{2}$

16. As dimensões de uma caixa em formato de paralelepípedo reto-retângulo são dadas pelas raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$. Determine o volume dessa caixa. 6 unidades de volume

17. Determine m de modo que a equação $x^3 - (4 + m)x^2 + (4 + 4m)x - 4m = 0$ admita $\alpha = 2$ como raiz dupla. $m \neq 2$

18. (Mackenzie-SP) Se na figura temos o esboço do gráfico da função $y = p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, a soma das raízes de $p(x)$ é: alternativa c

a) 2
b) -3
c) $-\frac{4}{3}$
d) $\frac{8}{5}$
e) $\frac{5}{2}$



ADILSON SECCO

19. (FGV) Dado o polinômio
$P(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + k$:

a) Resolva a equação $P(x) = 0$, para $k = 8$. $S = \{-2, 1, 2\}$
b) Determine o valor de k de modo que as raízes estejam em progressão aritmética de razão igual a 3.
Não existe k de modo que as raízes estejam em PA de razão 3.

Ver resolução das questões **20**, **23** e **31** no Guia do professor.

Aprofundamento

20. Dados os polinômios $A(x)$ e $B(x)$ com graus α e β, respectivamente, discutir em função de α e β os graus dos polinômios:

a) $A(x) + B(x)$

b) $A(x) \cdot B(x)$

21. Determine o grau do polinômio:
$P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2)^2 \cdot (x - 3)^3 \cdot \ldots \cdot (x - 10)^{10}$ 55

22. Para que valores de $m \in \mathbb{R}$ o resto da divisão de $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + mx + 1$ por $D(x) = 2x^2 - x + 1$ é um polinômio constante? $\frac{5}{2}$

23. Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, efetue a divisão de $P(x) = x^n - z^2$ por $D(x) = x - z$, sendo n natural não nulo e z complexo.

24. Determine os valores de h de modo que a equação $x^3 + hx^2 + (2h + 1)x + 1 = 0$ admita duas raízes reais opostas. -1

25. (Unicamp-SP) Dada a equação polinomial com coeficientes reais $x^3 - 5x^2 + 9x - a = 0$:

a) Encontre o valor numérico de a de modo que o número complexo $2 + i$ seja uma das raízes da equação. 5

b) Para o valor de a encontrado no item anterior, determine as outras raízes da mesma equação. $2 - i$ e 1

26. Seja $P(x)$ um polinômio do 5º grau com coeficientes reais. Sabendo que 2 e $-i$ são raízes de $P(x)$ e que $P(1) \cdot P(-1) < 0$, determine o número de raízes reais no intervalo $]-1, 1[$. uma

27. (Vunesp) A expressão $V(x) = x(16 - 2x)(24 - 2x)$ representa o volume, em cm³, de uma caixa na forma de um paralelepípedo retângulo-reto, em que x é a altura e os lados da base são $16 - 2x$ e $24 - 2x$.

a) Se nenhuma das arestas da caixa pode ser menor que 1 cm, determine os valores possíveis da variável x. $1 \leq x \leq \frac{15}{2}$

b) Quando $x = 5$ cm, o volume da caixa é 420 cm³. Investigue se existem outros valores de x para os quais o volume é 420 cm³. Em caso afirmativo, dê esses valores. $x = \frac{15 - \sqrt{141}}{2}$

28. Sabendo que a equação

$$\begin{vmatrix} 3 - x & 1 & -1 \\ 1 & 3 - x & -1 \\ 3 & 3 & -1 - x \end{vmatrix} = 0 \text{ tem uma raiz dupla,}$$

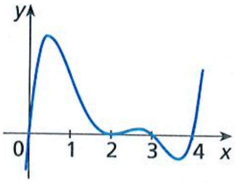
resolva-a em $\mathbb{C}$. $S = \{1, 2\}$, sendo 2 a raiz dupla.

29. A equação $x^3 - \sqrt{3}x^2 + 54 = 0$ tem raízes a, b e c.

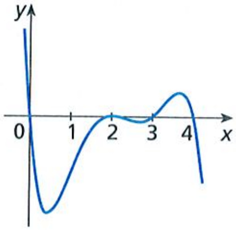
Calcule: $\log_3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$ $-\frac{5}{2}$

30. (Fuvest-SP) Dado o polinômio $p(x) = x^2(x - 1)(x^2 - 4)$, o gráfico da função $y = p(x - 2)$ é mais bem representado por: alternativa a

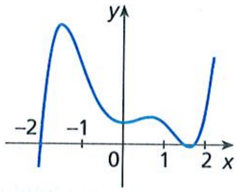
a)



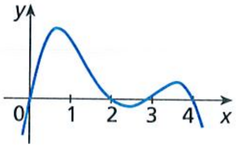
b)



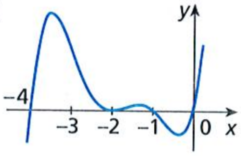
c)



d)



e)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

31. (IME-RJ) Sejam a, b e c as raízes do polinômio $P(x) = x^3 + rx - t$, em que r e t são números reais não nulos.

a) Determine o valor da expressão $a^3 + b^3 + c^3$ em função de r e t.

b) Demonstre que $S^{n+1} + r \cdot S^{n-1} - t \cdot S^{n-2} = 0$ para todo número natural $n \geq 2$, em que $S^k = a^k + b^k + c^k$ para qualquer número natural k.

Desafio

32. (Unicamp-SP)

a) Qual é o valor de λ na equação $z^3 - 5z^2 + 8z - \lambda = 0$ de modo que $z = 3$ seja uma raiz dessa equação? $\lambda = 6$

b) Para esse valor de λ, ache as três raízes z_1, z_2 e z_3 dessa equação. 3, $1 + i$ e $1 - i$

c) Ache o volume do sólido obtido quando a região triangular cujos vértices são os pontos z_1, z_2 e z_3 gira em torno da reta de equação $x = 1$.
$\frac{8\pi}{3}$ unidades de volume

Autoavaliação

Leia atentamente as questões a seguir e responda-as em seu caderno.

1. O polinômio $P(x) = (3a - b)x^2 + (-4a + 2i)x - 15i$, tem grau nulo se os valores de a e b forem, respectivamente: alternativa b

a) $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$. **c)** $2i$ e $-6i$.
b) $\frac{i}{2}$ e $\frac{3i}{2}$. **d)** $\frac{-3i}{2}$ e $\frac{5}{2}$.

2. Dado por $P(x) = -5ax^2 - 6x + 3i$, o valor de a é ▬▬▬, para que $P(-2i) = 5$. alternativa c

a) $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}i$ **c)** $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$
b) $1 + 3i$ **d)** $2 - 3i$

3. Dados os polinômios $P(x) = -x^4 - 4x + 2$ e $Q(x) = -2x^2 - 5i$, o valor de $P - Q^2$ é: alternativa d

a) $-10x^4 + 12x - i$
b) $x^2 + 2x - 5i$
c) $5x^5 - 4x^3 + 2x - 2i$
d) $-5x^4 - 20ix^2 - 4x + 27$

4. ▬▬▬ é uma das raízes do polinômio $P(x) = -ix^3 + 2x^2 - 2 + i$. alternativa b

a) i **b)** 1 **c)** 2i **d)** -1

5. O valor ▬▬▬ é o resto da divisão de $P(x) = x^3 - 7x^2 + 2x - 1$ por $x - 2$. alternativa d

a) $P(-2)$
b) $P(2) = -10$
c) $P(-2) = 5$
d) $P(2)$

6. No dispositivo de Briot-Ruffini a seguir, a vale ▬▬▬, b vale ▬▬▬, c vale ▬▬▬ e ▬▬▬ é o resto da divisão. alternativa b

$$\begin{array}{c|ccc:c} a & i & i & i+1 & i \\ \hline & i & 1+i & b & c \end{array}$$

a) $-i$; -2; $-i$; 0 **c)** i; 2; $-i$; $-i$
b) $-i$; 2; $-i$; $-i$ **d)** $-i$; 2; $-i$; 0

7. $P(x)$ é divisível por ▬▬▬. Então, $P(2) = P(-3) = 0$. alternativa c

a) $D(x) \neq 0$ **c)** $(x - 2)(x + 3)$
b) $(x - 2)(x - 3)$ **d)** $(x + 2)(x - 3)$

8. A equação $[(x + i)^3]^2 \cdot (x - 2 + i) = 0$ tem uma raiz ▬▬▬ igual a ▬▬▬ e uma raiz de multiplicidade ▬▬▬ igual a ▬▬▬. alternativa c

a) sêxtupla; i; 2; $-2 + i$ **c)** simples; $2 - i$; 6; $-i$
b) tripla; i; 1; $2 + i$ **d)** simples; $2 + i$; 6; i

9. O complexo $5 - 3i$ é raiz da equação $P(x) = 0$ de coeficientes reais. Então, $P(5 + 3i)$ é: alternativa c

a) 2i **b)** 2 **c)** 0 **d)** $-i$

10. O número ▬▬▬ pode ser uma raiz da equação $3x^4 - cx^3 + dx^2 - 2mx - 12 = 0$, com $c, d, m \in \mathbb{Z}$. alternativa d

a) 1,5 **b)** 5 **c)** -8 **d)** 0,66...

11. Na equação $2x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 + 2x + 10 = 0$, ▬▬▬ é a soma das raízes e ▬▬▬ é o produto. alternativa b

a) -5; $\frac{3}{2}$ **c)** $-\frac{1}{2}$; 5
b) $\frac{3}{2}$; -5 **d)** $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão										
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Trabalhar com polinômios de variável complexa.		X		X							
Determinar o grau e as raízes de um polinômio.	X			X							
Calcular o valor numérico de polinômios.		X							X		
Efetuar operações com polinômios.			X		X	X					
Aplicar métodos e teoremas para a divisão de polinômios.					X	X	X				
Resolver equações algébricas no universo complexo e estudar suas raízes.								X	X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	184 a 187	184 a 187	188 e 189	184 a 187	189 a 192	193 e 194	195 e 196	197 a 200	201 e 202	201 e 202	203 e 204